

Obsah

- 1 Základní pojmy
- 2 Sférická trigonometrie
 - Sinová věta
 - Kosinová věta pro stranu
 - Kosinová věta pro úhel
 - Pravoúhlý sférický trojúhelník

Matematická kartografie část kartografie, jejíž hlavní úlohou je převod údajů z referenční plochy do roviny pomocí kartografických zobrazení

- Sférická trigonometrie
- Referenční plochy, souřadnicové soustavy
- Důležité křivky - loxodroma, ortodroma
- Kartografická zobrazení, třídění zobrazení.
- Tissotova indikatrix, hlavní směry. Kartografická zkreslení (délkové, směrníkové, úhlové a plošné).
- Jednoduchá zobrazení kuželová, azimutální a válcová.
- Odvození zobrazovacích rovnic pro jednoduchá zobrazení.
- Azimutální a válcové projekce.
- Křovákovo zobrazení.
- Gaussovo konformní zobrazení elipsoidu v poledníkových pásích.
- Cassini-Soldnerovo zobrazení.

- Sférická trigonometrie
- Referenční plochy, souřadnicové soustavy
- Důležité křivky - loxodroma, ortodroma
- Kartografická zobrazení, třídění zobrazení.
- Tissotova indikatrix, hlavní směry. Kartografická zkreslení (délkové, směrníkové, úhlové a plošné).
- Jednoduchá zobrazení kuželová, azimutální a válcová.
- Odvození zobrazovacích rovnic pro jednoduchá zobrazení.
- Azimutální a válcové projekce.
- Křovákovo zobrazení.
- Gaussovo konformní zobrazení elipsoidu v poledníkových pásích.
- Cassini-Soldnerovo zobrazení.

- Sférická trigonometrie
- Referenční plochy, souřadnicové soustavy
- Důležité křivky - loxodroma, ortodroma
- Kartografická zobrazení, třídění zobrazení.
- Tissotova indikatrix, hlavní směry. Kartografická zkreslení (délkové, směrníkové, úhlové a plošné).
- Jednoduchá zobrazení kuželová, azimutální a válcová.
- Odvození zobrazovacích rovnic pro jednoduchá zobrazení.
- Azimutální a válcové projekce.
- Křovákovo zobrazení.
- Gaussovo konformní zobrazení elipsoidu v poledníkových pásích.
- Cassini-Soldnerovo zobrazení.

- Sférická trigonometrie
- Referenční plochy, souřadnicové soustavy
- Důležité křivky - loxodroma, ortodroma
- Kartografická zobrazení, třídění zobrazení.
- Tissotova indikatrix, hlavní směry. Kartografická zkreslení (délkové, směrníkové, úhlové a plošné).
- Jednoduchá zobrazení kuželová, azimutální a válcová.
- Odvození zobrazovacích rovnic pro jednoduchá zobrazení.
- Azimutální a válcové projekce.
- Křovákovo zobrazení.
- Gaussovo konformní zobrazení elipsoidu v poledníkových pásích.
- Cassini-Soldnerovo zobrazení.

Literatura

- Courseware
- http://old.gis.zcu.cz/studium/mk2/multimedialni_texty/index.html
- Buchar P.: Matematická kartografie (skriptum ČVUT)
- <http://home.zcu.cz/~jezekjan/mk1/>

Požadavky

- Vypracování semestrální práce
- Zkouška - písemná + ústní.

Požadavky

- Vypracování semestrální práce
- Zkouška - písemná + ústní.

Matematická kartografie

- Řeší různé způsoby zobrazení Země (resp. koule, elipsoidu) do roviny na základě požadavků na ně kladených.
- Důležitý obor pro tvorbu map, a vyjádření jejich zkreslení.
- Důležitý obor pro určení základních geometrických veličin (úhlů, délek) na mapách.

Matematická kartografie

- Řeší různé způsoby zobrazení Země (resp. koule, elipsoidu) do roviny na základě požadavků na ně kladených.
- Důležitý obor pro tvorbu map, a vyjádření jejich zkreslení.
- Důležitý obor pro určení základních geometrických veličin (úhlů, délek) na mapách.

Demo:

<https://www.jasondavies.com/maps/transition/>

<https://bl.ocks.org/enjalot/bd552e711b8325c64729>

Měření délek, Google Maps, Google Earth

Obsah

- 1 Základní pojmy
- 2 Sférická trigonometrie
 - Sinová věta
 - Kosinová věta pro stranu
 - Kosinová věta pro úhel
 - Pravoúhlý sférický trojúhelník

Geografické souřadnice - Zeměpisná délka

úhlová vzdálenost λ mezi rovinami nultého (greenwichského) a místního poledníku; pokud místní poledník leží na východ od Greenwichského poledníku, jde o východní zeměpisnou (geografickou) délku, pokud leží na západ od Greenwichského poledníku jde o západní zeměpisnou (geografickou) délku; přičteme-li ke greenwichské délce hodnotu 17 stupňů 40 minut dostaneme délku od Ferra, odečteme-li 2 stupně 20 minut dostaneme délku pařížského poledníku.

Geografické souřadnice - Zeměpisná délka

úhlová vzdálenost λ mezi rovinami nultého (greenwichského) a místního poledníku; pokud místní poledník leží na východ od Greenwichského poledníku, jde o východní zeměpisnou (geografickou) délku, pokud leží na západ od Greenwichského poledníku jde o západní zeměpisnou (geografickou) délku; přičteme-li ke greenwichské délce hodnotu 17 stupňů 40 minut dostaneme délku od Ferra, odečteme-li 2 stupně 20 minut dostaneme délku pařížského poledníku.

Geografické souřadnice - Zeměpisná šířka

úhlová vzdálenost φ bodu na zemském tělese (nebo na referenčním elipsoidu) od roviny rovníku; u bodů ležících nad rovníkem (směrem k severnímu pólu) jde o severní zeměpisnou (geografickou) šířku, u bodů ležících pod rovníkem o jižní zeměpisnou (geografickou) šířku.

Geografické souřadnice - na kouli (U, V) na elipsoidu (φ, λ) .

Geografické souřadnice - Zeměpisná šířka

úhlová vzdálenost φ bodu na zemském tělese (nebo na referenčním elipsoidu) od roviny rovníku; u bodů ležících nad rovníkem (směrem k severnímu pólu) jde o severní zeměpisnou (geografickou) šířku, u bodů ležících pod rovníkem o jižní zeměpisnou (geografickou) šířku.

Geografické souřadnice - na kouli (U, V) na elipsoidu (φ, λ) .

Astronomický azimut

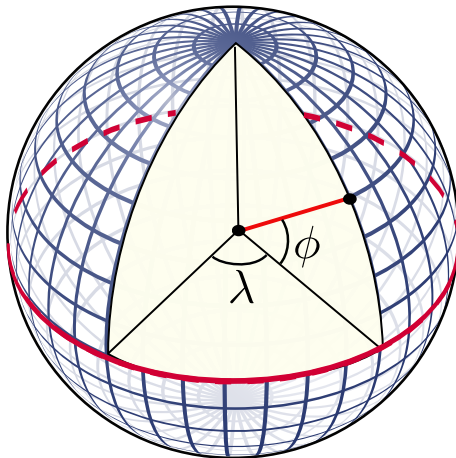
úhel mezi rovinou astronomického meridiánu a svislou rovinou procházející cílem, obvykle měřený v rovině astronomického horizontu od severu přes východ, jih a západ v případě astronomického azimutu pozemního cíle nebo od jihu přes západ, sever a východ v případě nebeského tělesa.

Astronomický azimut

úhel mezi rovinou astronomického meridiánu a svislou rovinou procházející cílem, obvykle měřený v rovině astronomického horizontu od severu přes východ, jih a západ v případě astronomického azimutu pozemního cíle nebo od jihu přes západ, sever a východ v případě nebeského tělesa.

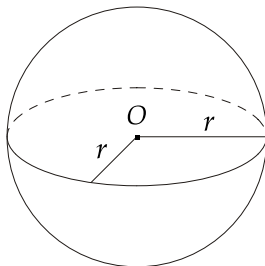
Poledník a rovnoběžka

- Co je poledník?
- Co je rovnoběžka?



Kulová plocha

- Kulovou plochou nazýváme množinu všech bodů v prostoru $\mathbb{E}_3$, jejíž každý bod X má od pevně zvoleného bodu O , který nazýváme střed kulové plochy, konstantní vzdálenost $|OX| = r > 0$ (tzv. poloměr). Pro zjednodušení úvah budeme v mnoha případech uvažovat $|OX| = r = 1$. Kulovou plochu o poloměru $r = 1$ nazýváme *jednotková kulová plocha*.



Přímky a úsečky na sféře, délka úsečky

- V rovinné geometrii rozumíme úsečkou nejkratší spojnici dvou bodů. Přímku chápeme jako úsečku nekonečně prodlouženou na obě strany. Stejně zavádíme pojem úsečky a přímky i na kulové ploše (s -přímka, s -úsečka).

Hlavní kružnice

- Nechť jsou dány dva libovolné body A, B na kulové ploše a bod O , střed kulové plochy. Rovina proložená body A, B a středem O protíná kulovou plochu v kružnici k , která se nazývá *hlavní kružnice*.

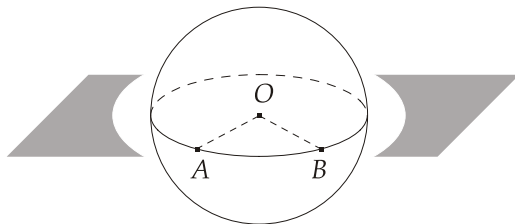


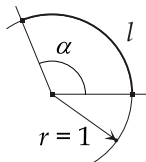
Figure: Hlavní kružnice (převzato z [3])

Vedlejší kružnice

- Všechny ostatní kružnice na kulové ploše vzniklé řezem roviny, která neprochází středem kulové plochy, nazýváme *vedlejší kružnice*. Pro jednotkovou kulovou plochu je poloměr libovolné hlavní kružnice roven jedné, vedlejší kružnice mají poloměr r menší než 1.

Délka s-úsečky

- Pro měření délek na sféře využijeme obloukové míry.
Na tomto místě proto připomeneme jak pojem obloukové míry, tak definici radiánu.
Velikost úhlu α vyjádříme v obloukové míře jako délku oblouku l , který je vyřat rameny úhlu α na jednotkové kružnici se středem ve vrcholu úhlu. *Radiánem* nazýváme úhel ρ , jehož oblouková míra je rovna 1; jeho velikost ve stupňové míře je $\rho^\circ = 180^\circ/\pi \doteq 57^\circ 17'$



Délka s-úsečky

Pro měření délek na sféře využijeme obloukové míry. Na tomto místě proto připomeneme jak pojem obloukové míry, tak definici radiánu.

Velikost úhlu α vyjádříme v obloukové míře jako délku oblouku l , který je vyřat rameny úhlu α na jednotkové kružnici se středem ve vrcholu úhlu. *Radiánem* nazýváme úhel ρ , jehož oblouková míra je rovna 1; jeho velikost ve stupňové míře je $\rho^\circ = 180^\circ/\pi \doteq 57^\circ 17'$

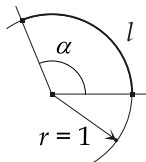


Figure: Délka úsečky - převzato z [3])

Vzdálenost $d(A, B)$ mezi dvěma body A, B na sféře S

Délka *nejkratšího* kruhového oblouku, který tyto body spojuje -
v obloukové míře odpovídá velikosti příslušného středového úhlu.

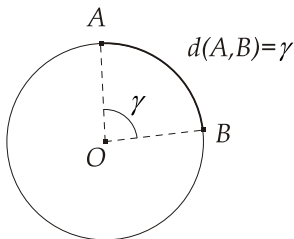


Figure: Délka s-úsečky (převzato z [3])

Sférický trojúhelník

Trojhran:

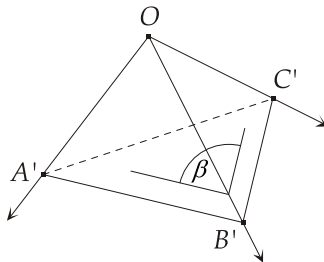


Figure: Trojhran s vyznačeným úhlem při hraně OB' (převzato z [3])

Sférický trojúhelník

Průnik trojhranu $O(A'B'C')$ a kulové plochy, jejíž střed je ve vrcholu O trojhranu - *sférický trojúhelník*

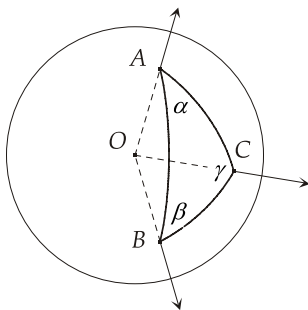


Figure: Sférický trojúhelník (převzato z [3])

Sférický trojúhelník

- Délky stran (jsou určeny úhly $\angle BOC$, $\angle AOC$, $\angle AOB$)
- úhly α , β , γ , což jsou úhly příslušného trojhranu.
- Strany sférického trojúhelníku jsou zároveň délky příslušných oblouků $\widehat{BC}$, $\widehat{AC}$, $\widehat{AB}$ hlavních kružnic.

Sférický trojúhelník

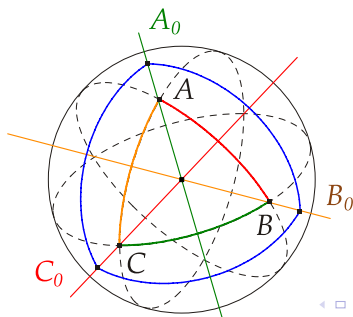
- Délky stran (jsou určeny úhly $\angle BOC$, $\angle AOC$, $\angle AOB$)
- úhly α , β , γ , což jsou úhly příslušného trojhranu.
- Strany sférického trojúhelníku jsou zároveň délky příslušných oblouků $\widehat{BC}$, $\widehat{AC}$, $\widehat{AB}$ hlavních kružnic.

Sférický trojúhelník

- Trojúhelník definovaný pomocí trojhranu se nazývá konvexní nebo také *Eulerův*.
- Každý z jeho *základních prvků*, tj. stran a úhlů, je menší než π .

Polární trojúhelník

Krajní body průměru kulové plochy, kolmého na rovinu dané hlavní kružnice, se nazývají *póly* této kružnice. Mějme na kulové ploše sférický trojúhelník ABC . Nechť A_0 je pól hlavní kružnice určené body B, C , ležící na stejné polokouli jako bod A . Analogicky získáme i body B_0, C_0 . Říkáme, že trojúhelník $A_0B_0C_0$ je *polární* k danému trojúhelníku ABC .



Polární trojúhelník

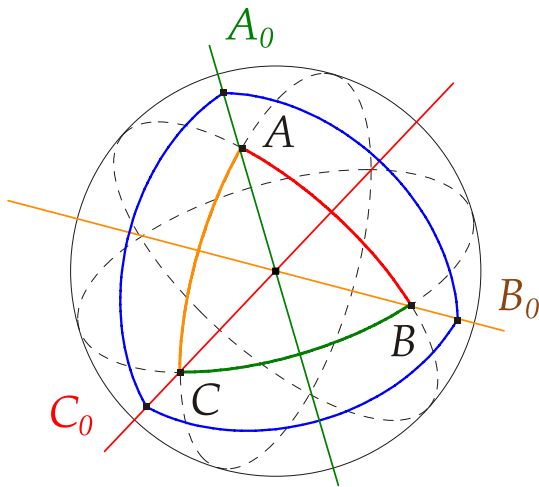


Figure: Polární trojúhelník (převzato z [31])

Polární trojúhelník

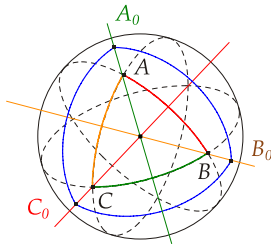


Figure: Polární trojúhelník (převzato z [3])

Jestliže trojúhelník $A_0B_0C_0$ je polární k trojúhelníku ABC , pak také obráceně trojúhelník ABC je polární k trojúhelníku $A_0B_0C_0$.

Strany polárního trojúhelníku jsou

$a_0 = 180^\circ - \alpha$, $b_0 = 180^\circ - \beta$, $c_0 = 180^\circ - \gamma$; jeho úhly jsou

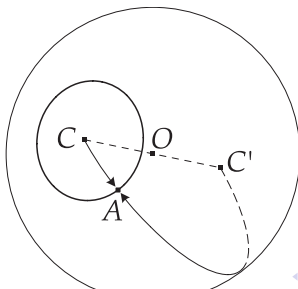
$\alpha_0 = 180^\circ - a$, $\beta_0 = 180^\circ - b$, $\gamma_0 = 180^\circ - c$

Sférická kružnice

Sférická kružnice (kružnice na kulové ploše) je množinou všech bodů kulové plochy, které mají od daného bodu C na kulové ploše sférickou vzdálenost r ,

$\mathcal{M} = \{X \in \mathbb{S}; d(XC) = r\}$, kde $d(XC)$ je sférická vzdálenost bodů X , C

Bod C je sférický střed kružnice, vzdálenost r nazýváme (sférický) poloměr kružnice.



Cvičení:

- Vypočtete vzdálenost Plzně od rovníku a od severního pólu. Vysvětlete použitý vzorec a zvolený postup.
- Zopakujte si rovinnou trigonometrii ($\cos$, $\sin$, $\tan$ apod. . . , jednotková kružnice).

Obsah

1 Základní pojmy

2 Sférická trigonometrie

- Sinová věta
- Kosinová věta pro stranu
- Kosinová věta pro úhel
- Pravoúhlý sférický trojúhelník

- $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma \in (0^\circ, 180^\circ)$
- Součet libovolných dvou stran je větší než strana třetí.
- Proti stejným stranám leží stejné úhly, proti větší straně leží větší úhel.
- Součet všech stran je menší než 360° , tj. $a + b + c < 360^\circ$.
- Součet všech úhlu je větší než 180° a menší než 540° , tj. $180^\circ < a + b + g < 540^\circ$.
- Rozdíl mezi součtem všech úhlu sférického trojúhelníku a úhlem prímým se nazývá *exces sférického trojúhelníku* (nadbytek), znací se e , tj. $e = a + b$

Sférická trigonometrie

- Matematický základ pro řešení problému, které se vyskytují v geodézii, kartografii, astronomii
- Sinová věta
- Kosinová věta pro stranu
- Kosinová věta pro úhel
- Řešení sférického trojúhelníku

Opakování rovinná trigonometrie . . . wikipedia

- Sinová věta
- Kosinová věta
- Pravoúhlý trojúhelník

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

Sinová věta

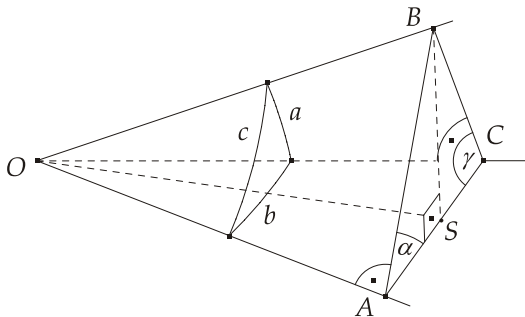


Figure: Sinová věta – odvození (Převzato z [3])

Sinová věta

$$BS = BA \cdot \sin \alpha \wedge BA = BO \cdot \sin c \Rightarrow BS = BO \cdot \sin c \cdot \sin \alpha$$

$$BS = BC \cdot \sin \gamma \wedge BC = BO \cdot \sin a \Rightarrow BS = BO \cdot \sin a \cdot \sin \gamma$$

porovnáním a po úpravě

$$\sin c \cdot \sin \alpha = \sin a \cdot \sin \gamma$$

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}$$

Obdobně platí:

$$\frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}, \quad \frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta}.$$

Kosinová věta pro stranu

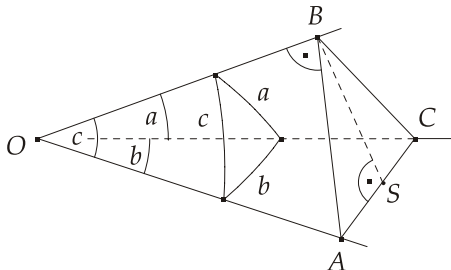


Figure: Kosinová věta – odvození (Převzato z [3])

Kosinová věta pro stranu

Podle kosinové věty rovinné trigonometrie platí pro $\triangle ABC$ resp. $\triangle ACO$:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \beta$$

$$AC^2 = OA^2 + OC^2 - 2OA \cdot OC \cdot \cos b$$

Pravé strany rovnic dáme do rovnosti a využijeme Pythagorovu větu pro $\triangle OAB$ resp. $\triangle OBC$:

$$2OA \cdot OC \cdot \cos b = \overbrace{OA^2 - AB^2}^{OB^2} + \overbrace{OC^2 - BC^2}^{OB^2} + 2AB \cdot BC \cdot \cos \beta$$

$$2OA \cdot OC \cdot \cos b = 2OB^2 + 2AB \cdot BC \cdot \cos \beta$$

Kosinová věta pro stranu

Zkrátíme dvěma a obě strany vydělíme délkami stran OA a OC .
Za poměry stran můžeme následně dosadit odpovídající
goniometrické funkce rovinné trigonometrie:

$$\begin{aligned}\cos b &= \frac{OB}{OA} \cdot \frac{OB}{OC} + \frac{AB}{OA} \cdot \frac{CB}{OC} \cdot \cos \beta \\ \cos b &= \cos c \cdot \cos a + \sin c \cdot \sin a \cdot \cos \beta\end{aligned}$$

Obdobně pro zbývající strany a úhly. Tento vztah nazýváme
kosinová věta pro stranu ve sférickém trojúhelníku:

Jsou-li a, b, c strany a α, β, γ úhly sférického trojúhelníku. Platí:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

Jsou-li a, b, c strany a α, β, γ úhly sférického trojúhelníku, pak platí:

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a \quad (\text{a cyklické rovnosti}).$$

Pravoúhlý sférický trojúhelník

- pravoúhlé - mají jeden úhel pravý, strana proti pravému úhlu se nazývá přepona, zbylé strany jsou odvěsny,
- rovnoramenné - mají dvě strany shodné, tyto strany nazýváme ramena, zbývající strana je základna,
- rovnostranné - mají všechny strany shodné
- polární - ...

Pravoúhlý sférický trojúhelník

V případě pravoúhlého trojúhelníku se věta sinová a kosinová výrazně zjednoduší. Položme $\gamma = 90^\circ$ ($\sin \gamma = 1$, $\cos \gamma = 0$):

- věta sinová pro pravoúhlý sférický trojúhelník bude mít tvar:

$$\sin a = \sin c \cdot \sin \alpha, \quad \sin b = \sin c \cdot \sin \beta$$

- věty kosinové pro pravoúhlý sférický trojúhelník se změní na:

$$\cos \alpha = \sin \beta \cdot \cos a, \quad \cos \beta = \sin \alpha \cdot \cos b \quad \text{kos. věta pro úhel}$$

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b \quad \text{kos. věta pro stranu}$$

Neperovo pravidlo pro pravoúhlý trojúhelník:

Do kruhového schématu zapíšeme nejprve přeponu c , po stranách přilehlé úhly α, β a proti nim rozdíly $90^\circ - a, 90^\circ - b$, kde a, b jsou odvěsny pravoúhlého trojúhelníku. Dle Neperova pravidla platí, že kosinus každého prvku v kruhovém schématu je roven:

- součinu sinů protilehlých prvků
- součinu kotangent sousedních prvků.

Neperovo pravidlo pro pravoúhlý trojúhelník

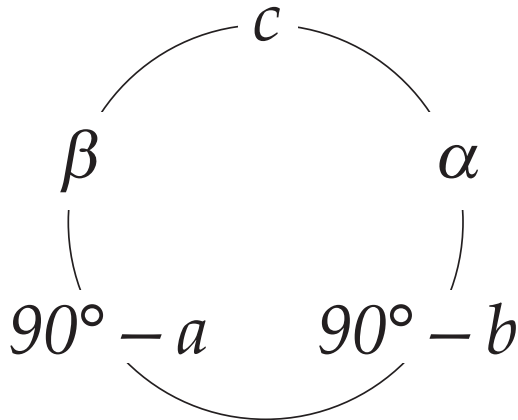


Figure: Převzato z [3]

Neperovo pravidlo pro pravoúhlý trojúhelník

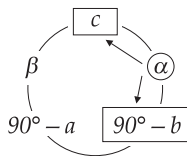
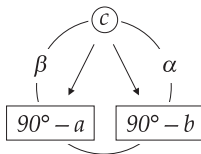


Figure: Neperovo pravidlo, Převzato z [3]

Zdroje:

-  Grafarend E., Krumm F.: *Map Projections*, Springer, Germany, 2006
-  Buchar P.: *Matematická kartografie 10*, Skriptum ČVUT, 2002
-  Hložek M.: *Sférická trigonometrie*, Dimplová práce ZČU, 2005