LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ

Definice:
Nechť $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ jsou lineární vektorové prostory nad tělesem T, nechť $\mathbf{L}: \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ je zobrazení z množiny $\mathcal{U}$ do množiny $\mathcal{V}$.
Zobrazení $\mathbf{L}$ se nazývá **lineární zobrazení (homomorfismus)**, jestliže pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{U}$ a pro každý prvek $\lambda \in T$ platí:

1. $\mathbf{L}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{L}(\mathbf{x}) + \mathbf{L}(\mathbf{y})$,
2. $\mathbf{L}(\lambda \mathbf{x}) = \lambda \cdot \mathbf{L}(\mathbf{x})$.

Poznámka:
Pro každé lineární zobrazení $\mathbf{L}: \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ je obrazem nulového prvku opět nulový prvek, tj. platí $\mathbf{L}(\mathbf{0}_1) = \mathbf{0}_2$, kde $\mathbf{0}_1$ je nulový prvek prostoru $\mathcal{U}$ a $\mathbf{0}_2$ je nulový prvek prostoru $\mathcal{V}$.

Definice:
Nechť $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ jsou lineární vektorové prostory nad tělesem T, nechť $\mathbf{L}: \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ je lineární zobrazení.
Množina všech prvků prostoru $\mathcal{U}$, které se zobrazí do nulového prvku $\mathbf{0}$ (v prostoru $\mathcal{V}$), se nazývá **jádro zobrazení L** a značí se Ker$\mathbf{L}$:

$$\mathrm{Ker}\mathbf{L} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{U} \ ; \ \mathbf{L}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}.$$

Množina obrazů všech prvků z prostoru $\mathcal{U}$ se nazývá **obraz zobrazení L** a značí Im$\mathbf{L}$:

$$\mathrm{Im}\mathbf{L} = \{\mathbf{y} \in \mathcal{V} \ ; \ \exists \mathbf{x} \in \mathcal{U} \ : \ \mathbf{L}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}\}.$$

Věta: (podprostory jádro a obraz lineárního zobrazení)
Nechť $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ jsou lineární vektorové prostory nad tělesem T, $\mathbf{L}: \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ je lineární zobrazení.
Potom Ker$\mathbf{L}$ je podprostor prostoru $\mathcal{U}$ a Im$\mathbf{L}$ je podprostor prostoru $\mathcal{V}$.

Věta: (dimenze jádra a obrazu lineárního zobrazení)
Nechť $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ jsou lineární vektorové prostory nad tělesem T, $\mathbf{L}:\mathcal{U}\longrightarrow\mathcal{V}$ je lineární zobrazení.
Potom platí:
$$\dim(\mathrm{Ker}\mathbf{L}) + \dim(\mathrm{Im}\mathbf{L}) = \dim\mathcal{U}.$$

Definice:
Nechť $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ jsou lineární vektorové prostory nad tělesem T, nechť $\mathbf{L}:\mathcal{U}\longrightarrow\mathcal{V}$ je lineární zobrazení.
Potom zobrazení $\mathbf{L}$ se nazývá **izomorfismus (izomorfní zobrazení)**, je-li prosté a je-li zobrazením **na** prostor $\mathcal{V}$.
Lineární vektorové prostory $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ se nazývají **izomorfní prostory**, jestliže existuje izomorfismus $\mathbf{L}:\mathcal{U}\longrightarrow\mathcal{V}$.

Věta: (charakterizace izomorfismu)
Nechť $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ jsou lineární vektorové prostory nad tělesem T, nechť $\mathbf{L}:\mathcal{U}\longrightarrow\mathcal{V}$ je lineární zobrazení.
Potom platí:

$$\mathbf{L} \text{ je izomorfismus právě tehdy, když } \mathrm{Ker}\mathbf{L} = 0 = \{\mathbf{0}\},\ \mathrm{Im}\mathbf{L} = \mathcal{V}.$$

Věta: (inverzní zobrazení k izomorfismu)
Nechť $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ jsou lineární vektorové prostory nad tělesem T, nechť $\mathbf{L}:\mathcal{U}\longrightarrow\mathcal{V}$ je lineární zobrazení.
Je-li $\mathbf{L}$ izomorfismus, potom existuje inverzní zobrazení $\mathbf{L}^{-1}:\mathcal{V}\longrightarrow\mathcal{U}$, které je také izomorfismem.

Věta: (izomorfismus a lineární závislost)
Nechť $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ jsou lineární vektorové prostory nad tělesem T, nechť $\mathbf{L}:\mathcal{U}\longrightarrow\mathcal{V}$ je izomorfismus.
Potom prvky $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k \in \mathcal{U}$ jsou lineárně závislé právě tehdy, když jsou lineárně závislé jejich obrazy - prvky $\mathbf{L}(\mathbf{u}_1), \mathbf{L}(\mathbf{u}_2), \ldots, \mathbf{L}(\mathbf{u}_k)$.

Věta: (dimenze izomorfních prostorů)
Nechť $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ jsou lineární vektorové prostory konečné dimenze.
Prostory $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ jsou izomorfní právě tehdy, když platí:

$$\dim \mathcal{U} = \dim \mathcal{V}.$$

Souřadnicový izomorfismus
Jestliže $\mathcal{U}$ je lineární vektorový prostor konečné dimenze nad tělesem $\mathbf{R}$, $\dim \mathcal{U} = k$. Zvolme $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ bázi prostoru $\mathcal{U}$.
Pro každý prvek $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ je možný zápis $\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \cdots + \lambda_k \mathbf{u}_k$, kde $\widehat{\mathbf{x}} = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k]^T$ je souřadnicový vektor prvku $\mathbf{x}$ v bázi $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$.
Definujme zobrazení $\mathbf{L}: \mathcal{U} \longrightarrow \mathbf{R}_k$ předpisem

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}) = \widehat{\mathbf{x}}\,.$$

Toto zobrazení je izomorfismus, který se nazývá **souřadnicový izomorfismus**.

Matice lineárního zobrazení

Nechť $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ jsou lineární vektorové prostory konečné dimenze nad tělesem T, $\dim \mathcal{U} = k$, $\dim \mathcal{V} = n$. Nechť $\mathbf{L}: \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ je lineární zobrazení.
Nechť $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ je báze prostoru $\mathcal{U}$, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ je báze prostoru $\mathcal{V}$.
Libovolný prvek $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci prvků báze tohoto prostoru, tj.

$$\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \ldots + \lambda_k \mathbf{u}_k,$$

tedy

$$\widehat{\mathbf{x}} = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k]^T$$

je souřadnicový vektor prvku $\mathbf{x}$ v bázi $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ prostoru $\mathcal{U}$.
Zobrazíme-li prvek $\mathbf{x}$, získáme prvek $\mathbf{y} = \mathbf{L}(\mathbf{x})$ v prostoru $\mathcal{V}$, také tento prvek lze vyjádřit jako lineární kombinaci prvků báze $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ prostoru $\mathcal{V}$, proto

$$\mathbf{y} = \eta_1 \mathbf{v}_1 + \eta_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \eta_n \mathbf{v}_n,$$

a tedy

$$\widehat{\mathbf{y}} = [\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n]^T$$

je souřadnicový vektor prvku $\mathbf{y} = \mathbf{L}(\mathbf{x})$ v bázi $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ prostoru $\mathcal{V}$.

Hledejme nyní, jaký je vztah mezi souřadnicovými vektory $\widehat{\mathbf{x}}$ a $\widehat{\mathbf{y}}$, je-li $\mathbf{y} = \mathbf{L}(\mathbf{x})$.
Protože zobrazení $\mathbf{L}$ je lineární, musí platit, že obrazem lineární kombinace prvků ("vzorů") je lineární kombinace obrazů jednotlivých prvků, tj.

$$\mathbf{y} = \mathbf{L}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}(\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \ldots + \lambda_k\mathbf{u}_k) = \lambda_1\mathbf{L}(\mathbf{u}_1) + \lambda_2\mathbf{L}(\mathbf{u}_2) + \ldots + \lambda_k\mathbf{L}(\mathbf{u}_k).$$

Proto

$$\widehat{\mathbf{y}} = \widehat{\mathbf{L}(\mathbf{x})} = \lambda_1\widehat{\mathbf{L}(\mathbf{u}_1)} + \lambda_2\widehat{\mathbf{L}(\mathbf{u}_2)} + \ldots + \lambda_k\widehat{\mathbf{L}(\mathbf{u}_k)}.$$

K vyjádření hledaného vztahu potřebujeme tedy znát souřadnicové vektory obrazů prvků báze prostoru $\mathcal{U}$ vzhledem k bázi prostoru $\mathcal{V}$. Pro každé $i = 1, 2, \ldots, k$ označme $\widehat{\mathbf{L}(\mathbf{u}_i)} = [\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots, \alpha_{ni}]^T$, kde jednotlivé souřadnice určujeme ze vztahu

$$\mathbf{L}(\mathbf{u}_i) = \alpha_{1i}\mathbf{v}_1 + \alpha_{2i}\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_{ni}\mathbf{v}_n.$$

Potom

$$\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \end{bmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \vdots \\ \alpha_{n2} \end{bmatrix} + \ldots + \lambda_k \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{1k} \\ \alpha_{2k} \\ \vdots \\ \alpha_{nk} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1\alpha_{11} + \lambda_2\alpha_{12} + \cdots + \lambda_k\alpha_{1k} \\ \lambda_1\alpha_{21} + \lambda_2\alpha_{22} + \cdots + \lambda_k\alpha_{2k} \\ \vdots \\ \lambda_1\alpha_{n1} + \lambda_2\alpha_{n2} + \cdots + \lambda_k\alpha_{nk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1k} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nk} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{bmatrix}$$

Tedy $\widehat{\mathbf{y}} = \mathbf{A} \cdot \widehat{\mathbf{x}}$, kde matice $\mathbf{A}$ se po sloupcích skládá ze souřadnicových vektorů $\widehat{\mathbf{L}(\mathbf{u}_i)}$ obrazů prvků báze $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ prostoru $\mathcal{U}$ vzhledem k bázi $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ prostoru $\mathcal{V}$, tj.

$$\mathbf{A} = \left[\ \widehat{\mathbf{L}(\mathbf{u}_1)}\ \middle|\ \widehat{\mathbf{L}(\mathbf{u}_2)}\ \middle|\ \cdots\ \middle|\ \widehat{\mathbf{L}(\mathbf{u}_k)}\ \right] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1k} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nk} \end{bmatrix}.$$

Matice $\mathbf{A}$ se nazývá **matice lineárního zobrazení $\mathbf{L}$** v bázích $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ prostoru $\mathcal{U}$ a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ prostoru $\mathcal{V}$.

Pro každý prvek $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ a jeho obraz $\mathbf{y} = \mathbf{L}(\mathbf{x})$ přitom platí vztah

$$\mathbf{A} \cdot \widehat{\mathbf{x}} = \widehat{\mathbf{y}}.$$

Věta: (hodnost matice lineárního zobrazení)
Nechť $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ jsou lineární vektorové prostory konečné dimenze, nechť $\mathbf{L}: \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ je lineární zobrazení.
Jestliže $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ je báze prostoru $\mathcal{U}$, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ báze prostoru $\mathcal{V}$ a matice $\mathbf{A}$ je matice lineárního zobrazení $\mathbf{L}$ v těchto bázích, potom

$$\dim(\mathrm{Im}\mathbf{L}) = \mathrm{hod}(\mathbf{A}).$$

Důsledek:
Nechť $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ jsou lineární vektorové prostory konečné dimenze, nechť $\mathbf{L}: \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ je izomorfismus.
Jestliže $\mathbf{A}$ je matice izomorfismu $\mathbf{L}$ v daných bázích, potom matice $\mathbf{A}$ je regulární.

Věta: (matice složeného lineárního zobrazení)
Nechť $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ jsou lineární vektorové prostory konečné dimenze nad tělesem T, nechť $\mathbf{L}_1: \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$, $\mathbf{L}_2: \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ jsou lineární zobrazení. Uvažujme báze: $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ prostoru $\mathcal{U}$, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ prostoru $\mathcal{V}$ a $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m$ prostoru $\mathcal{W}$.
Jestliže $\mathbf{A}$ je matice lineárního zobrazení $\mathbf{L}_1$ a $\mathbf{B}$ je matice lineárního zobrazení $\mathbf{L}_2$ v daných bázích, potom složené zobrazení $\mathbf{L}: \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{W}$ dané předpisem

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}_2(\mathbf{L}_1(\mathbf{x}))$$

pro každé $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ je opět lineární a matice složeného zobrazení $\mathbf{L}$ v daných bázích je

$$\mathbf{C} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}\,.$$

Důsledek: (matice inverzního zobrazení k izomorfismu)
Nechť $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ jsou lineární vektorové prostory konečné dimenze, nechť $\mathbf{L}: \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ je izomorfismus.
Jestliže $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ je báze prostoru $\mathcal{U}$, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ je báze prostoru $\mathcal{V}$ a $\mathbf{A}$ je matice izomorfismu $\mathbf{L}: \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ v daných bázích,
potom maticí inverzního zobrazení $\mathbf{L}^{-1}: \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{U}$ v těchto bázích je matice $\mathbf{A}^{-1}$ inverzní k matici $\mathbf{A}$.

Matice přechodu

Nechť $\mathcal{U}$ je lineární vektorový prostor konečné dimenze n. Jestliže $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ je báze prostoru $\mathcal{U}$ a $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n$ je také báze téhož prostoru $\mathcal{U}$, potom pro libovolný prvek $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ lze určit jeho souřadnicové vektory v obou bázích:
Prvek $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ vyjádříme jako lineární kombinaci prvků báze $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ prostoru $\mathcal{U}$, tj. platí $\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{f}_1 + \lambda_2 \mathbf{f}_2 + \ldots + \lambda_n \mathbf{f}_n$, potom souřadnicový vektor prvku $\mathbf{x}$ v bázi $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ je

$$\widehat{\mathbf{x}} = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]^T .$$

Stejný prvek $\mathbf{x}$ ale lze vyjádřit též jako lineární kombinaci prvků báze $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n$, tj. $\mathbf{x} = \eta_1 \mathbf{g}_1 + \eta_2 \mathbf{g}_2 + \ldots + \eta_n \mathbf{g}_n$, souřadnicový vektor prvku $\mathbf{x}$ vzhledem k bázi $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n$ je proto

$$\widetilde{\mathbf{x}} = [\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n]^T .$$

Uvažujme identické zobrazení $\mathbf{L}: \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}$, pro které $\mathbf{L}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ pro každý prvek $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$. Označme $\mathbf{T}$ matici tohoto lineárního zobrazení, a to v bázi $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n$ prostoru $\mathcal{U}$, který zobrazujeme, a v bázi $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ prostoru $\mathcal{U}$, do kterého zobrazujeme.
Tedy

$$\mathbf{T} = \left[\ \widehat{\mathbf{L}(\mathbf{g}_1)} \,\middle|\, \widehat{\mathbf{L}(\mathbf{g}_2)} \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, \widehat{\mathbf{L}(\mathbf{g}_n)}\ \right] = \left[\ \widehat{\mathbf{g}_1} \,\middle|\, \widehat{\mathbf{g}_2} \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, \widehat{\mathbf{g}_n}\ \right],$$

neboť $\mathbf{L}(\mathbf{g}_i) = \mathbf{g}_i$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$.
Pro každý prvek $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ platí

$$\mathbf{T} \cdot \widetilde{\mathbf{x}} = \widehat{\mathbf{L}(\mathbf{x})} = \widehat{\mathbf{x}} .$$

Matice $\mathbf{T}$ je regulární, protože identické zobrazení je izomorfismus.

Výše vytvořená matice $\mathbf{T}$ se nazývá **matice přechodu od báze $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ k bázi** $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n$ prostoru $\mathcal{U}$.

Budeme-li uvažovat inverzní zobrazení $\mathbf{L}^{-1}$ k identickému zobrazení $\mathbf{L}$, bude to opět identické zobrazení na prostoru $\mathcal{U}$. Jako matici inverzního zobrazení $\mathcal{U}$ dostaneme **matici přechodu od báze $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n$ k bázi $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$** prostoru $\mathcal{U}$, která je inverzní maticí k matici $\mathbf{T}$, t.j.

$$\mathbf{T}^{-1} = \left[\ \widetilde{\mathbf{L}^{-1}(\mathbf{f}_1)} \,\middle|\, \widetilde{\mathbf{L}^{-1}(\mathbf{f}_2)} \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, \widetilde{\mathbf{L}_{-1}(\mathbf{f}_n)}\ \right] = \left[\ \widetilde{\mathbf{f}_1} \,\middle|\, \widetilde{\mathbf{f}_2} \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, \widetilde{\mathbf{f}_n}\ \right].$$

Přitom platí vztah

$$\mathbf{T}^{-1} \cdot \widehat{\mathbf{x}} = \widetilde{\mathbf{x}}$$

pro každý prvek $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$.

SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ALGEBRAICKÝCH ROVNIC II (GAUSSOVA ELIMINAČNÍ METODA - řešitelnost soustav)

Zopakujme na úvod, co již o soustavách lineárních algebraických rovnic víme z dřívějška.

Soustavu m **lineárních algebraických rovnic o** n **neznámých** lze zapsat jako

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}\,,$$

kde $\mathbf{A}$ je matice typu m/n nad tělesem $\mathbf{R}$ reálných čísel, $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ je n-členný aritmetický vektor nad tělesem $\mathbf{R}$ a $\mathbf{b} = [b_1, b_2, \dots, b_m]^T$ je m-členný aritmetický vektor nad tělesem $\mathbf{R}$.

Při označení $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ lze vztah $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ rozepsat do tvaru:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

t.j.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = &\quad b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = &\quad b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = &\quad b_m. \end{aligned}$$

Matice $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ se nazývá **matice soustavy**, vektor $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ **vektor neznámých**, vektor $\mathbf{b} = [b_1, b_2, \dots, b_m]^T$ **vektor pravých stran**.

Matici $[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$ nazýváme **rozšířená matice soustavy**.

Řešením soustavy m lineárních algebraických rovnic o n neznámých zapsané maticově jako $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ se nazývá každý n-členný aritmetický vektor $\mathbf{r}$ nad tělesem $\mathbf{R}$, pro který platí $\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{b}$.
Dvě soustavy lineárních rovnic jsou **ekvivalentní soustavy**, jestliže mají stejné množiny řešení.

Věta:
Jestliže matice $[\mathbf{C}|\mathbf{d}]$ vznikne z matice $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ užitím řádkových elementárních úprav, potom soustavy lineárních rovnic $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ a $\mathbf{C} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{d}$ jsou ekvivalentní.

Připomeňme ještě, které úpravy patří mezi **řádkové elementární úpravy matice A** (typu m/n)

1. vzájemná výměna dvou řádků matice,
2. vynásobení řádku matice **nenulovým** číslem,
3. přičtení násobku jednoho řádku k jinému řádku.

Poznámka:
POZOR! Analogie k výše uvedené větě o ekvivalenci soustav neplatí, pokud jsou použity sloupcové elementárních úpravy!

Z části věnované hodnosti matic víme, že matice $\mathbf{A}$ je ve **stupňovitém tvaru**, platí-li: pokud je v některém řádku i-tý prvek první nenulový (je to tzv. pivotní prvek), potom ve všech dalších řádcích jsou všechny prvky od prvního až do i-tého včetně rovny 0.

Klasická Gaussova eliminační metoda spočívá v tom, že se v první fázi převede rozšířená matice soustavy na stupňovitý tvar (tzv. eliminace) a ve druhé fázi se vyjádří řešení postupným dosazováním (tzv. zpětné dosazování, zpětný chod). Pokud je v první fázi rozšířená matice soustavy převedena na redukovaný stupňovitý tvar, zjednodušuje se podstatně druhá fáze Gaussovy metody. Další vylepšení tohoto postupu umožňují teoretické poznatky, které nyní uvedeme.

Definice:
Nechť $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ je soustava lineárních algebraických rovnic.
Soustava se nazývá **homogenní**, jestliže $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ neboli vektor pravých stran je nulový.
Soustava se nazývá **nehomogenní**, jestliže $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, tj. vektor pravých stran je nenulový .

Věta: (řešení homogenní soustavy)
Nechť $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ je homogenní soustava lineárních algebraických rovnic, kde matice soustavy $\mathbf{A}$ je typu m/n.
Potom množina všech řešení homogenní soustavy rovnic je lineární vektorový prostor dimenze

$$n - \mathrm{hod}(\mathbf{A})\,.$$

Uvažovaná homogenní soustava rovnic $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ má matici soustavy $\mathbf{A}$ typu m/n, je to tedy soustava m rovnic pro n neznámých. Proto je dimenze prostoru řešení homogenní soustavy rovnic "počet neznámých - hodnost matice $\mathbf{A}$".

Ještě si uvědomme, že homogenní soustavy rovnic jsou vždy řešitelné, tj. vždy mají řešení. Řešením libovolné homogenní soustavy je totiž nulový vektor. Má-li soustava právě jedno řešení, je to tento nulový vektor. V případě soustavy s nekonečně mnoha řešeními existuje kromě tohoto nulového řešení ještě nekonečně mnoho nenulových řešení.
Pokud ale soustava rovnic je nehomogenní, tedy má nenulovou pravou stranu, může navíc nastat i situace, kdy řešení soustavy nemusí existovat.

Věta: (Frobeniova podmínka řešitelnosti)
Soustava lineárních algebraických rovnic $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ má řešení právě tehdy, když

$$\mathrm{hod}([\mathbf{A}|\mathbf{b}]) = \mathrm{hod}(\mathbf{A}),$$

tj. hodnost rozšířené matice soustavy a hodnost matice soustavy jsou shodné.

Věta: (řešení nehomogenní soustavy)
Nechť $\mathbf{v}$ je řešení nehomogenní soustavy lineárních algebraických rovnic $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$.
Potom $\mathbf{w}$ je řešení soustavy rovnic $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ právě tehdy, když $\mathbf{w} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$, kde $\mathbf{u}$ je řešení homogenní soustavy rovnic $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Věta o řešení nehomogenní soustavy poskytuje návod, jak popsat všechna řešení řešitelných soustav rovnic (toto se využívá především v situaci, kdy má soustava nekonečně mnoho řešení). Jestliže soustava $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ má řešení, potom stačí najít jedno řešení $\mathbf{x}_P$ této nehomogenní soustavy rovnic $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ (tzv. partikulární řešení) a obecné řešení $\mathbf{x}_H$ příslušné homogenní soustavy, tj. určit všechna řešení homogenní soustavy rovnic $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$. Obecné řešení nehomogenní soustavy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ je potom jejich součtem:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_P + \mathbf{x}_H \,.$$

Věta: (soustava s regulární maticí)
Má-li soustava lineárních algebraických rovnic $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ matici soustavy $\mathbf{A}$ regulární, potom má tato soustava právě jedno řešení.

Protože regulární matice lze charakterizovat třemi navzájem ekvivalentními podmínkami:

- hodnost regulární matice se rovná řádu matice,
- determinant regulární matice je nenulový,
- k regulární matici existuje inverzní matice,

můžeme při řešení soustavy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ s regulární maticí $\mathbf{A}$ vybírat z následujících tří metod:

1. Klasická Gaussova eliminační metoda.
   V eliminační fázi se rozšířená matice soustavy převede na stupňovitý tvar, přičemž z matice $\mathbf{A}$ vznikne horní trojúhelníková matice. Řešení lze určit jednoduše zpětným dosazováním. Při využití redukovaného stupňovitého tvaru vznikne z matice $\mathbf{A}$ soustavy dokonce matice diagonální, jsou-li pivotní prvky rovny 1, tak matice jednotková.

2. **Cramerovo pravidlo.**
   Nechť $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ je soustava lineárních algebraických rovnic s regulární maticí $\mathbf{A}$ řádu n, tj. $\det \mathbf{A} \neq 0$.
   Pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$ označme $\mathbf{A}_i$ matici, která vznikne z matice $\mathbf{A}$ tím, že i-tý sloupec matice $\mathbf{A}$ nahradíme sloupcem $\mathbf{b}$.
   Potom pro řešení soustavy rovnic $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ platí $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$, kde pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$ je
   $$x_i = \frac{\det \mathbf{A}_i}{\det \mathbf{A}}.$$

3. **Pomocí inverzní matice.**
   Protože k regulární matici $\mathbf{A}$ existuje inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$, můžeme jediné řešení soustavy získat jako součin inverzní matice a vektoru pravých stran, tj.
   $$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}.$$