

4. Nezávislost náhodných veličin

V této kapitole budeme zkoumat jeden z nejvýznamnějších pojmů v teorii pravděpodobnosti – pojem nezávislosti náhodných veličin.

Definice 4.1

Bud' $\{\Omega, \mathfrak{F}, P\}$ pravděpodobnostní prostor a $\{X_i\}_{i \in I}$, (I je indexová množina) systém náhodných veličin definovaných na tomto pravděpodobnostním prostoru. Náhodné veličiny patřící do tohoto systému nazveme **nezávislé**, jestliže pro libovolné $t_1, \dots, t_n \in I$ a pro libovolná čísla $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_1$ platí

$$P(X_{t_1} < x_1, \dots, X_{t_n} < x_n) = P(X_{t_1} < x_1) \dots P(X_{t_n} < x_n) \quad (4.1).$$

Poznámka 4.1

Předchozí definice důsledně vychází z definice nezávislosti náhodných jevů 1.5.1.5. Totiž pro libovolnou n – tici indexů z indexové množiny $\{\omega; X_{t_1}(\omega) < x_1, \dots, X_{t_n}(\omega) < x_n\}$ náhodným jevem, na který můžeme uplatnit právě uvedenou definici nezávislosti náhodných jevů. Nevýhodou výše uvedené definice je, to že je nutno vyšetřovat všechny možné skupiny indexů z indexové množiny. Naštěstí pro případ konečné množiny náhodných veličin tento problém řeší následující věta.

Věta 4.1

Náhodné veličiny X_1, X_2, \dots, X_n jsou nezávislé právě tehdy, když pro libovolná čísla $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_1$ platí

$$P(X_1 < x_1, \dots, X_n < x_n) = P(X_1 < x_1) \dots P(X_n < x_n) \quad (4.2).$$

Důkaz:

Jen naznačíme.

- 1) Každou k – tici ($k < n$) náhodných jevů A_1, \dots, A_k je možno napsat jako průnik n náhodných jevů $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k \cap \underbrace{\Omega \cap \dots \cap \Omega}_{(n-k)x} = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k$
- 2) Zvolíme – li $A_n^i = \{\omega; X_i(\omega) < n\}$, získáme systém množin A_n^i , pro který platí $A_n^i \subseteq A_{n+1}^i$ a $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n^i = \Omega$ a podle věty 1.5.2.2 o polospojivosti pravděpodobnosti je $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_i < n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n^i) = P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n^i\right) = P(\Omega) = 1$
- 3) Výpočet pravděpodobnosti průniku libovolné k – tice můžeme tedy napsat limitně jako výpočet pravděpodobnosti průniku n – tice.

Q.E.D.

Věta 4.2

Nechť $\mathbb{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ je náhodný vektor, nechť dále náhodné veličiny X_1, X_2, \dots, X_n jsou nezávislé. Potom

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_1(x_1) \cdot F_2(x_2) \dots F_n(x_n), \quad (4.3)$$

kde F je sdružená distribuční funkce náhodného vektoru \mathbb{X} a F_1, F_2, \dots, F_n jsou postupně distribuční funkce jednotlivých náhodných veličin X_1, X_2, \dots, X_n .

Důkaz:

Vztah (4.2) není nic jiného než zápis vztahu (4.3). Tím je tedy důkaz věty 4.2 proveden. Význam této věty spočívá v tom, že sdruženou distribuční funkci \mathbb{F} mohu napsat jako součin jednotlivých distribučních funkcí prvků náhodného vektoru, je možno provést „separaci náhodných veličin“.

V další části uvedeme variaci předchozí věty použité na případ spojitého či diskrétního náhodného vektoru.

Věta 4.3

Nechť $\mathbb{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ je spojitý náhodný vektor se sdruženou hustotou \mathbf{f} . Potom náhodné veličiny X_1, X_2, \dots, X_n jsou nezávislé právě, když pro každé $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_n$ platí

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \dots f_n(x_n), \quad (4.4)$$

kde f_1, \dots, f_n jsou postupně hustoty jednotlivých náhodných veličin X_1, \dots, X_n .

Důkaz:

Důkaz vztahu (4.4) provedeme jednoduše tím, že ve vztahu (4.3) budeme obě strany parciálně derivovat:

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= \frac{\partial^n \mathbb{F}(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n} = \frac{\partial^n (F_1(x_1) \cdot F_2(x_2) \dots F_n(x_n))}{\partial x_1 \dots \partial x_n} = F_1'(x_1) \cdot F_2'(x_2) \dots F_n'(x_n) = \\ &= f_1(x_1) \dots f_n(x_n). \end{aligned}$$

Q.E.D.

Věta 4.4

Nechť $\mathbb{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ je diskrétní náhodný vektor se sdruženou pravděpodobnostní funkcí \mathbb{P} . Potom náhodné veličiny X_1, X_2, \dots, X_n jsou nezávislé právě, když pro každé $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_n$ platí

$$\mathbb{P}(x_1, \dots, x_n) = P_1(x_1) \dots P_n(x_n), \quad (4.5)$$

kde P_1, \dots, P_n jsou pravděpodobnostní funkce jednotlivých náhodných veličin X_1, X_2, \dots, X_n .

Důkaz:

Provedeme ho obdobně, využijeme vztah (4.3) a vztah mezi pravděpodobnostní funkcí a distribuční funkcí náhodné veličiny (resp. náhodného vektoru) uvedeného ve větě 2.5 (resp. 2.6).

První využití principu nezávislosti náhodných veličin nám poskytuje následující věta o střední hodnotě součinu nezávislých náhodných veličin.

Věta 4.5

Nechť \mathbf{X}, \mathbf{Y} jsou nezávislé náhodné veličiny a $E(\mathbf{X}) < +\infty$ a $E(\mathbf{Y}) < +\infty$. Potom existuje i $E(\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y})$ a je

$$E(\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}) = E(\mathbf{X}) \cdot E(\mathbf{Y}) \quad (4.6)$$

Důkaz:

Provedeme pro spojitý případ. Protože zobrazení, které dvojici hodnot (x, y) přiřadí jejich součin je dokonce spojitě, podle věty 3.5 uvedené dříve, existuje střední hodnota součinu náhodných veličin \mathbf{X} a \mathbf{Y} . Její výpočet provedeme podle (3.20):

$E(X.Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x.y.f(x,y) dx dy$, kde f je sdružená hustota náhodného vektoru $\mathbb{X}=(X_1, X_2)$. Náhodné veličiny X a Y jsou nezávislé, podle (4.4) je tedy

$E(X.Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x.y.f_1(x).f_2(y) dx dy$, kde f_1, f_2 jsou hustoty náhodných veličin X a Y .

$$E(X.Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x.y.f_1(x).f_2(y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x.f_1(x)).(y.f_2(y)) dx dy =$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x.f_1(x) dx \right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} y.f_2(y) dy \right) = E(X).E(Y).$$

Předchozí rovnosti vyplývají dále ze vztahů mezi dvojným a dvojnásobnými integrály.

Q.E.D.

Věta 4.6

Nechť X, Y jsou nezávislé náhodné veličiny, pro něž existují rozptyly $VAR(X)$ a $VAR(Y)$. Potom existuje rozptyl náhodné veličiny $X+Y$ a je roven

$$VAR(X + Y) = VAR(X) + VAR(Y) \quad (4.7)$$

Důkaz:

$$VAR(X + Y) = E\left(\left((X + Y) - E(X + Y)\right)^2\right) =$$

$$= E\left(X^2 + 2.X.Y + Y^2 - 2.(X + Y).E(X + Y) + (E(X + Y))^2\right) = E(X^2) + 2.E(X.Y) +$$

$$+ E(Y^2) - 2.E(X + Y).E(X + Y) + (E(X + Y))^2 = E(X^2) + 2.E(X.Y) + E(Y^2) -$$

$$- (E(X))^2 - 2.E(X).E(Y) - (E(Y))^2 = \left(E(X^2) - (E(X))^2\right) + \left(E(Y^2) - (E(Y))^2\right) -$$

$$- 2.(E(X).E(Y) - E(X.Y)) = VAR(X) + VAR(Y) - 2.(E(X).E(Y) - E(X.Y)) =$$

$$= VAR(X) + VAR(Y),$$

Poslední rovnost vyplývá ze vztahu (4.6).

Q.E.D.

Věta 4.7

Nechť $\mathbb{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ je náhodný vektor a nechť $E(|X_k|^2) < +\infty, k = 1, 2, \dots, n$.

Potom existují i smíšené momenty 2-hého řádu $E(|X_i.X_j|), i, j = 1, \dots, n$.

Důkaz:

Pro všechny hodnoty $i, j = 1, \dots, n$ platí $(|x_i| - |x_j|)^2 \geq 0 \Rightarrow$

$0 \leq |x_i.x_j| \leq \frac{1}{2} \cdot (|x_i|^2 + |x_j|^2)$, existují momenty 2-hého řádu podle věty 3.1, tedy

$$0 \leq E(|X_i.X_j|) \leq \frac{1}{2} \cdot \left(E(|X_i|^2) + E(|X_j|^2)\right) \quad (4.8)$$

Q.E.D.

Věta 4.8

Nechť X je náhodná veličina a necht' existuje $E(|X|^2)$. Potom existuje i $E(|X|)$ a tedy také $E(X)$.

Důkaz:

Zvolíme – li v předchozí větě za jednu z náhodných veličin X a za druhou náhodnou veličinu konstantu rovnou jedné vyplývá ze (4.8) existence $E(|X|)$, protože ale je obecně pro jakékoli X :

$$-|X| \leq X \leq |X| \quad \Rightarrow \quad -E(|X|) \leq E(X) \leq E(|X|).$$

Q.E.D.**Definice 4.2**

Nechť X, Y jsou náhodné veličiny, jejichž $0 \neq E(|X|^2) < +\infty$ a $0 \neq E(|Y|^2) < +\infty$.

Potom číslo

$$\text{cov}(X, Y) = E[(X - E(X)) \cdot (Y - E(Y))] \quad (4.9)$$

nazveme **kovariancí** náhodných veličin X a Y . Jestliže $\text{cov}(X, Y) = 0$ řekneme, že náhodné veličiny X a Y jsou nekorelované.

Číslo

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X) \cdot \rho(Y)} \quad (4.10)$$

nazveme **korelačním koeficientem** náhodných veličin X a Y .

Definice 4.3

Nechť $\mathbb{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ je náhodný vektor. Necht' existují rozptyly náhodných veličin $X_i, i=1, 2, \dots, n$. Potom nazveme matici $C = (c_{ij})$, kde $c_{ij} = \text{cov}(X_i, X_j)$ **kovarianční maticí** náhodného vektoru \mathbb{X} .

Existují – li hodnoty $\rho_{ij} = \rho(X_i, X_j)$ nazveme matici $R = (\rho_{ij})$ **korelační maticí** náhodného vektoru \mathbb{X} .

Věta 4.9

Nechť $C = (c_{ij}), i, j=1, \dots, n$ je kovarianční matice náhodného vektoru $\mathbb{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$. Potom je matice C symetrická a kvadratická forma

$$\sum_{i,j=1}^n c_{ij} \cdot x_i \cdot x_j \quad (4.11)$$

proměnných x_i, x_j je pozitivně semidefinitní.

Důkaz:

Symetrie matice C vyplývá z toho, že $c_{ij} = \text{cov}(X_i, X_j) = \text{cov}(X_j, X_i) = c_{ji}$. Pozitivní semidefinitnost matice vyplývá z následující nerovnosti:

$$\sum_{i,j=1}^n c_{ij} \cdot x_i \cdot x_j = E \left\{ \left(\sum_{i=1}^n (X_i - E(X_i)) \cdot x_i \right)^2 \right\} \geq 0 \quad (4.12)$$

Q.E.D.

Věta 4.10

Nechť $C = (c_{ij})$, $i, j = 1, \dots, n$ je kovarianční matice náhodného vektoru $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$. Potom platí:

1. $c_{ij}^2 \leq c_{ii} \cdot c_{jj}$
2. $|\rho_{ij}| \leq 1$
3. Nechť je $X_j = a \cdot X_i + b$, $a \neq 0$. Potom $|\rho_{ij}| = 1$

Důkaz:

1. Zavedeme pomocnou funkci $g(\lambda) = [\lambda \cdot (X_i - E(X_i)) - (X_j - E(X_j))]^2$. Jistě existuje střední hodnota $g(\lambda)$ (dokažte samostatně), její hodnota je rovna $E(g(\lambda)) = \lambda^2 \cdot E((X_i - E(X_i))^2) - 2\lambda \cdot E[(X_i - E(X_i)) \cdot (X_j - E(X_j))] + E((X_j - E(X_j))^2)$. Protože $g(\lambda) \geq 0$ je podle vlastnosti nezápornosti střední hodnoty náhodné veličiny $E(g(\lambda)) \geq 0$. Protože jde o nezáporný kvadratický trojčlen musí platit: $4c_{ij}^2 - 4c_{ii} \cdot c_{jj} \leq 0$.
2. Vyplývá z předchozí nerovnosti.
3.
$$\rho_{ij} = \frac{E[(X_i - E(X_i)) \cdot (a \cdot X_i + b - a \cdot E(X_i) - b)]}{\sigma(X_i) \cdot \sigma(a \cdot X_i + b)} = \frac{a \cdot E[X_i - E(X_i)]^2}{|a| \cdot \sigma^2(X_i)} = \frac{a \cdot \text{VAR}(X_i)}{|a| \cdot \text{VAR}(X_i)} = \frac{a}{|a|}$$

Q.E.D.

Příklad

Nechť sdružená hustota náhodných veličin X a Y je rovna

$$f : (x, y) \mapsto \begin{cases} 2 & , 0 < x < y \wedge 0 < y < 1 \\ 0 & , \text{jinak} \end{cases}$$

- a) Zjistěte hustotu X
- b) Zjistěte hustotu Y
- c) Zjistěte nezávislost X a Y
- d) Stanovte hodnotu korelačního koeficientu.

Řešení:

a) $f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$, hodnoty x je nutno rozdělit do tří disjunktních množin: Na

interval $(-\infty, 0)$; $(0, 1)$; $(1, +\infty)$. Zřejmě je hodnota f_1 v prvním a třetím intervalu rovna nule. Nechť tedy $x \in (0, 1)$, potom

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_x^1 2 dy = 2 \cdot (1 - x)$$

b) $f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$. Podobně jako v předchozím je jasné, že hodnoty funkce f_2 v intervalech $(-\infty, 0)$ a $(1, +\infty)$ jsou rovny nule. Zvolme tedy $y \in (0, 1)$, potom je

$$f_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \int_0^y 2 dx = 2 \cdot y$$

c) K ověření nezávislosti použijeme větu 4.3 a vztah 4.4, protože ale na intervalu (0,1) je: $2 \neq 2 \cdot y \cdot 2 \cdot (1-x)$, nejsou náhodné veličiny X a Y nezávislé.

d) Zjistíme nejdříve hodnotu $E(X)$ a $E(Y)$. Tedy

$$E(X) = \int_0^1 x \cdot 2 \cdot (1-x) dx = 2 \cdot \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}, \quad \text{dále} \quad E(Y) = \int_0^1 y \cdot 2 \cdot y dy = \frac{2}{3}.$$

$$\text{spočítáme} \quad E(X^2) = \int_0^1 x^2 \cdot 2 \cdot (1-x) dx = 2 \cdot \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{6}, \quad E(Y^2) = \int_0^1 y^2 \cdot 2 \cdot y dy = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Odtud můžeme zjistit hodnoty rozptylů} \quad \text{VAR}(X) = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18} \quad \text{a} \quad \text{VAR}(Y) = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}.$$

Pro určení kovariance ještě potřebujeme zjistit $E(X \cdot Y)$:

$$E(X \cdot Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot y \cdot f(x, y) dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^y x \cdot y \cdot 2 dx \right) dy = \int_0^1 y^3 dy = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{36}.$$

$$\rho(X, Y) = \frac{\frac{1}{36}}{\sqrt{\frac{1}{18}} \cdot \sqrt{\frac{1}{18}}} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{18}} = \frac{1}{2}$$