0. ÚVOD - číselné obory, matematické symboly

Číselné množiny, intervaly

Číselné množiny:

- **Přirozená čísla**
$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}\,,$$
resp.
$$\mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \cup \{0\}\,.$$

- **Celá čísla**
$$\mathbf{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}\,.$$

- **Racionální čísla**
$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{p}{q}\,;\; p, q \in \mathbf{Z},\; q \neq 0 \right\}\,.$$
Racionální čísla jsou ta čísla, která lze vyjádřit pomocí zlomku. Při zápisu racionálního čísla pomocí desetinného rozvoje musí být tento desetinný rozvoj buď konečný nebo periodický nekonečný.

- **Reálná čísla R**.
Mezi reálná čísla patří kromě racionálních čísel ještě čísla iracionální, neboli ta, která mají nekonečný neperiodický desetinný rozvoj.

- **Komplexní čísla**
$$\mathbf{C} = \{a + bi;\; a, b, \in \mathbf{R}\}\;,$$
kde i je tzv. *imaginární jednotka*, tj. symbol s vlastností $i^2 = -1$.

V příloze 0.2 jsou shrnuty všechny důležité vlastnosti týkající se počítání s reálnými, resp. s komplexními čísly.

Intervaly jsou důležité podmnožiny množiny reálných čísel $\mathbf{R}$:
Pro $a, b \in \mathbf{R}, a < b$, používáme označení:

uzavřený interval	$\langle a, b\rangle := \{x \in \mathbf{R}\,;\ a \leq x \leq b\}$,
otevřený interval	$(a, b) := \{x \in \mathbf{R}\,;\ a < x < b\}$,
polouzavřené intervaly	$(a, b\rangle := \{x \in \mathbf{R}\,;\ a < x \leq b\}$,
	.. zleva otevřený, zprava uzavřený,
	$\langle a, b) := \{x \in \mathbf{R}\,;\ a \leq x < b\}$,
	.. zleva uzavřený, zprava otevřený.

Přitom číslo a se nazývá *počáteční bod* a číslo b *koncový bod intervalu.*
Všechny výše uvedené intervaly jsou *omezené intervaly.*

Neomezené intervaly jsou

$$\langle a, +\infty) := \{x \in \mathbf{R}\,;\ x \geq a\}\,,$$

$$(a, +\infty) := \{x \in \mathbf{R}\,;\ x > a\}\,,$$

$$(-\infty, b\rangle := \{x \in \mathbf{R}\,;\ x \leq b\}\,,$$

$$(-\infty, b) := \{x \in \mathbf{R}\,;\ x < b\}\,,$$

kde jsou a, b libovolná reálná čísla.
Zapamatujme si, že $+\infty$ ani $-\infty$ nejsou reálná čísla, ale pouze matematické symboly (tj. nepatří do $\mathbf{R}$).

Poznámka:
Protože při připomenutí číselných oborů bylo použito značení obvyklé z teorie množin a výrokového kalkulu, následující odstavce doplní informace týkající se právě tohoto v matematice běžně používaného aparátu ke stručnému zápisu vlastností objektů.

Výroky

Výrok je každé sdělení, tvrzení, u kterého lze jednoznačně rozhodnout, zda je či není pravdivé.
Každému výroku lze proto přiřadit jedinou pravdivostní hodnotu, výrok je vždy buď pravdivý, nebo nepravdivý.
Výroky značíme např. V, V_1, V_2.

Nové složitější výroky (tzv. *složené výroky*) se tvoří z daných výroků pomocí *logických spojek* a příp. závorek jako pomocných znaků.

Základní logické spojky:
Negace výroku $\neg V,\ \bar{V},\ \text{non } V$
"není pravda, že V", "neplatí V", "ne..."

Konjunkce (logický součin) $V_1 \wedge V_2,\ V_1 \,\&\, V_2$
"V_1 a zároveň V_2", "V_1 a současně V_2", "V_1 a též V_2", "V_1 i V_2"

Disjunkce (logický součet) $V_1 \vee V_2$
"V_1 nebo V_2" (nevylučuje se přitom současná platnost obou spojovaných výroků)

Implikace $V_1 \Longrightarrow V_2$
"jestliže V_1, potom V_2", "z V_1 plyne V_2", "V_1 implikuje V_2", "V_1 je postačující podmínkou pro V_2", "V_2 je nutnou podmínkou pro V_1"
Výrok V_1 se nazývá *předpoklad*, výrok V_2 *závěr implikace (tvrzení).*

Ekvivalence $V_1 \Longleftrightarrow V_2$
"V_1 právě tehdy, když V_2", "V_1 tehdy a jen tehdy, když V_2", "V_1 je ekvivalentní s V_2", "V_1 je nutná a postačující podmínka pro V_2"

Tvrzení většiny matematických vět lze vystihnout pomocí tzv. *kvantifikovaných výroků*, jsou to obvykle složené výroky obsahující kromě logických spojek navíc ještě **kvantifikátory**:

1. *Obecný kvantifikátor* $\forall\, x \in M : V(x)$
   "pro každý prvek $x \in M$ je pravdivý výrok $V(x)$ ",
   "pro libovolný prvek $x \in M$ platí výrok $V(x)$ ",
   "každý prvek $x \in M$ má vlastnost $V(x)$ "
2. *Existenční kvantifikátor* $\exists\, x \in M : V(x)$
   "existuje prvek $x \in M$ s vlastností $V(x)$ ",
   "lze najít prvek $x \in M$, pro který je pravdivý výrok $V(x)$ "

   (a) speciálně: $\exists\,!\, x \in M : V(x)$
   "existuje **právě jeden** prvek $x \in M$ s vlastností $V(x)$ "

Množiny a operace s nimi

Množina ... soubor, shrnutí různých objektů; tyto objekty se nazývají **prvky množiny**.

Značení:
množiny - velká písmena (např. A, B, M, Ω)
prvky množiny - malá písmena (např. x, y, a_1, a_2)
$x \in M$ ... objekt x je prvkem množiny M
$y \notin M$ ... objekt y není prvkem množiny M

Prázdná množina je množina, která neobsahuje žádný prvek, značíme ji symboly $\emptyset$ nebo $\{\}$.

Nechť dále A, B jsou libovolné množiny.
Rovnost množin $A = B$ znamená, že množiny A, B obsahují tytéž prvky; symbolicky zapsáno

$$A = B \iff (x \in A \Leftrightarrow x \in B)\,.$$

Množinová inkluze $A \subseteq B$: množina A je podmnožinou množiny B, pokud každý prvek množiny A je též prvkem množiny B ; symbolicky

$$A \subseteq B \iff (x \in A \Rightarrow x \in B)\,.$$

Pro libovolné dvě množiny A, B je zřejmá platnost následující ekvivalence:

$$A = B \iff (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)\,.$$

Množina A je *vlastní podmnožinou* množiny B (symbolický zápis $A \subset B$), pokud je $A \subseteq B$ a existuje alespoň jeden prvek $b \in B$ takový, že $b \notin A$, neboli

$$A \subset B \iff (A \subseteq B \wedge A \neq B)\,.$$

Poznámka:
Pro číselné obory platí následující množinové inkluze neboli "vlastnosti býti vlastní podmnožinou":

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{N}_0 \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$$

a
$$\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$$
(reálná čísla lze chápat jako komplexní čísla s nulovou imaginární částí).

Množinové operace:
Nechť A, B jsou množiny (podmnožiny vhodné základní množiny U, zvané též *univerzum*).
Sjednocení množin A a B je množina všech prvků, které leží **alespoň** v jedné z množin A, B:
$$A \cup B := \{x;\, x \in A \vee x \in B\}\,.$$
Průnik množin A a B je množina takových prvků, které jsou **zároveň** prvky množiny A i množiny B:
$$A \cap B := \{x;\, x \in A \wedge x \in B\}\,.$$
Rozdíl množin A a B je tvořen prvky množiny A, které zároveň nejsou prvky množiny B:
$$A \setminus B := \{x;\, x \in A \wedge x \notin B\}\,.$$
Doplněk množiny A tvoří všechny prvky základní množiny U, které nejsou prvky množiny A, k definici této operace lze proto užít rozdíl množin:
$$A^C = \bar{A} = -A := U \setminus A\,.$$

Platí-li pro dvě množiny X, Y, že žádný prvek není současně prvkem obou těchto množin, tj.:
$$X \cap Y = \emptyset\,,$$
nazýváme je *disjunktní množiny.*

Poznámka:
Příkladem disjunktních množin je množina všech racionálních čísel a množina všech iracionálních čísel. Sjednocením těchto dvou množin se získá množina všech reálných čísel $\mathbf{R}$.

Kartézský součin množin A, B je množina (všech možných) **uspořádaných dvojic** (a, b) prvků $a \in A, b \in B$ (první prvek je z první množiny, druhý z množiny druhé):

$$A \times B := \{(a, b);\ a \in A, b \in B\}\,.$$

Pozor! Kartézský součin množin obecně **není komutativní operace**, tj. záleží na pořadí násobených množin:

$$A \times B \neq B \times A \ \text{ pro neprázdné, různé množiny } \ A, B.$$

Poznámka:
Pomocí kartézského součinu množiny všech reálných čísel se sebou samou získáme množinu

$$\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(a, b)\ ;\ a \in \mathbf{R},\ b \in \mathbf{R}\}$$

všech uspořádaných dvojic reálných čísel, značíme ji též $\mathbf{R}^2$.
Podobně

$$\mathbf{R}^3 = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(a, b, c)\ ;\ a \in \mathbf{R},\ b \in \mathbf{R},\ c \in \mathbf{R}\}$$

je množina všech uspořádaných trojic reálných čísel.

Maximum a minimum číselné množiny, omezenost

Připomeňme zde též definice pojmů souvisejících s omezeností číselných množin, tedy vysvětleme si, co rozumíme nejmenším, resp. největším prvkem množiny, a kdy hovoříme o množině omezené.

Definice:
Nechť $M \subset \mathbf{R}, M \neq \emptyset$, je neprázdná číselná množina.
Řekneme, že $a \in M$ je *maximum (největší prvek) množiny* M, jestliže platí:

$$\forall x \in M :\ x \leq a\,;$$

píšeme $a = \max M$.

Definice:
Nechť $M \subset \mathbf{R}, M \neq \emptyset$, je neprázdná číselná množina.
Prvek $b \in M$ se nazývá *minimum (nejmenší prvek) množiny* M právě tehdy, když platí:

$$\forall x \in M : \, x \geq b\,;$$

píšeme $b = \min M$.

Definice:
Nechť M je neprázdná číselná množina ($M \subset \mathbf{R}, M \neq \emptyset$).
Řekneme, že množina M je *shora omezená*, jestliže existuje **reálné** číslo $c \in R$ tak, že platí:

$$\forall x \in M : \, x \leq c\,;$$

číslo c s touto vlastností se nazývá *horní mez (horní závora) množiny* M.

Říkáme dále, že množina M je *zdola omezená*, pokud existuje **reálné** číslo $d \in \mathbf{R}$ takové, že platí:

$$\forall x \in M : \, x \geq d\,;$$

potom číslo d s touto vlastností se nazývá *dolní mez (dolní závora) množiny* M.

Množina, která je zároveň omezená shora i zdola, se nazývá **omezená množina**.

Poznámka:
Každá **konečná** neprázdná množina $M \subset \mathbf{R}, M \neq \emptyset$, je omezená, má maximum i minimum.

Poznámka:
Jsou-li $a, b \in \mathbf{R}, a < b$, platí pro omezené intervaly s počátečním bodem a a koncovým bodem b následující tvrzení:

- uzavřený interval $\langle a, b\rangle := \{x \in \mathbf{R}; a \leq x \leq b\}$ má minimum a a maximum b
- polouzavřený interval $(a, b\rangle := \{x \in \mathbf{R}; a < x \leq b\}$ zleva otevřený, zprava uzavřený, nemá minimum neboli nejmenší prvek, ale má maximum, tedy největší prvek, kterým je číslo b

- polouzavřený interval $\langle a, b) := \{x \in \mathbf{R}; a \leq x < b\}$ zleva uzavřený, zprava otevřený, má nejmenší prvek - číslo a, ale nemá největší prvek, nemá maximum
- otevřený interval $(a, b) := \{x \in \mathbf{R}; a < x < b\}$, nemá ani minimum, ani maximum

Přílohy ke kapitole 0:

- Příloha 0.1 Výroky a množiny - rozšíření
  tabulky pravdivostních hodnot logických spojek, negace složených výroků a kvantifikovaných výroků, příklady kvantifikovaných výroků, zadání množin, vlastnosti prázdné množiny, vlastnosti množinových operací, poznámky ke kartézskému součinu množin, mocnina množiny
- Příloha 0.2 Číselné množiny - rozšíření
  vlastnosti operací sčítání a násobení reálných čísel, uspořádání reálných čísel a jeho vlastnosti, absolutní hodnota reálného čísla a její vlastnosti; komplexní čísla v algebraickém a goniometrickém tvaru, Gaussova rovina komplexních čísel, operace s komplexními čísly, Moivreova věta a n-tá odmocnina komplexního čísla