

Řešené příklady z lineární algebry - část 4

Typové příklady s řešením

Příklad 4.1:

Určete všechna řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned}3x_1 + 15x_2 - 4x_3 + x_4 - x_5 &= -5, \\x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 &= 3, \\-2x_1 - 10x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 22x_5 &= -5, \\-3x_1 - 15x_2 + 6x_3 - 2x_4 - 6x_5 &= 12.\end{aligned}$$

Řešení:

Soustavu lineárních algebraických rovnic budeme řešit Gaussovou eliminační metodou. Rozšířenou matici soustavy upravíme pomocí řádkových elementárních úprav na stupňovitý tvar.

$$\begin{aligned}[\mathbf{A}|\mathbf{b}] &= \left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & 15 & -4 & 1 & -1 & -5 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & -10 & 4 & 3 & 22 & -5 \\ -3 & -15 & 6 & -2 & -6 & 12 \end{array} \right] \sim \\ &\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 5 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 15 & -4 & 1 & -1 & -5 \\ -2 & -10 & 4 & 3 & 22 & -5 \\ -3 & -15 & 6 & -2 & -6 & 12 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 5 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -10 & -2 & -7 & -14 \\ 0 & 0 & 8 & 5 & 26 & 1 \\ 0 & 0 & 12 & 1 & 0 & 21 \end{array} \right]\end{aligned}$$

První fázi úprav jsme začali výběrem vhodného pivotního prvku v prvním sloupci matice, je to číslo 1 ve druhém řádku, proto nejprve vyměníme první a druhý řádek matice. Dále budeme přičítáním vhodných násobků pivotního prvního řádku eliminovat první neznámou ze zbylých řádků, tj. k druhému řádku přičteme (-3) -násobek, ke třetímu řádku 2-násobek a ke čtvrtému řádku 3-násobek pivotního prvního řádku. První řádek tak splnil svoji roli pivotního řádku v první fázi úprav, při dalších úpravách rozšířené matice soustavy jej nebudeme používat, proto jej budeme již pouze opisovat.

V další fázi úprav se zaměříme na třetí sloupec, žádné z čísel $-10, 8, 12$ ale není vhodným pivotním prvkem. Pivotní prvek 2 dostaneme např. tak, že ke druhému řádku přičteme řádek čtvrtý. Druhý řádek po této úpravě využijeme jako pivotní a ke třetímu řádku přičteme jeho (-4) -násobek a ke čtvrtému řádku jeho (-6) -násobek. Takto získáme další stupeň v požadovaném tvaru matice:

$$\dots \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 5 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 5 & 26 & 1 \\ 0 & 0 & 12 & 1 & 0 & 21 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 5 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 54 & -27 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 42 & -21 \end{array} \right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 5 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

K získání konečného stupňovitého tvaru matice už stačilo pouze třetí řádek vynásobit číslem $1/9$, resp. čtvrtý řádek číslem $1/7$. Oba takto upravené řádky jsou shodné, proto přičtením (-1) -násobku třetího řádku ke čtvrtému získáme řádek ze samých nul.

Ze stupňovitého tvaru matice vidíme, že hodnost matice soustavy \mathbf{A} je stejná jako hodnost rozšířené matice $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$:

$$\text{hod}(\mathbf{A}) = \text{hod}([\mathbf{A}|\mathbf{b}]) = 3.$$

Soustava splňuje Frobeniovu podmínku řešitelnosti, je řešitelná. Protože společná hodnost obou matic je menší než počet neznámých

$$\text{hod}(\mathbf{A}) = 3 < n = 5,$$

má zadaná soustava nekonečně mnoho řešení.

Všechna řešení soustavy získáme tak, že k jednomu řešení soustavy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ s pravou stranou \mathbf{b} (tzv. partikulární řešení) přičteme obecné řešení homogenní soustavy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$, která je určena stejnou maticí \mathbf{A} a pravou stranu má samozřejmě nulovou. Neboli

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_N + \mathbf{x}_H.$$

Partikulární řešení \mathbf{x}_N soustavy s pravou stranou \mathbf{b} určíme jako řešení soustavy, která odpovídá stupňovitému tvaru matice, tj. jako řešení soustavy

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 &= 3, \\ 2x_3 - x_4 - 7x_5 &= 7, \\ x_4 + 6x_5 &= -3. \end{aligned}$$

Je zřejmé, že z jednotlivých rovnic se nejdříve dopočítají neznámé, které odpovídají pivotním prvkům, tedy vždy první neznámé, zde to jsou x_1, x_3, x_4 . Za zbylé dvě neznámé x_2 a x_5 lze dosadit libovolná čísla, nejčastěji se užívá

nula. Zvolíme-li $x_2 = 0$ a $x_5 = 0$, z třetí rovnice dostaneme $x_4 = -3$, potom z druhé rovnice vyplyne $x_3 = 2$ a z první rovnice nakonec $x_1 = 2$. Tedy

$$\mathbf{x}_N = [2, 0, 2, -3, 0]^T.$$

Ještě zbývá určit obecné řešení odpovídající homogenní soustavy

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 &= 0, \\ 2x_3 - x_4 - 7x_5 &= 0, \\ x_4 + 6x_5 &= 0. \end{aligned}$$

Víme, že všechna řešení homogenní soustavy lineárních algebraických rovnic tvoří podprostor lineárního prostoru \mathbf{R}_5 , jehož dimenzi určuje rozdíl mezi počtem neznámých a hodnotí matice soustavy, tedy

$$n - \text{hod}(\mathbf{A}) = 5 - 3 = 2.$$

Potřebujeme proto určit dva prvky báze tohoto podprostoru, všechna řešení homogenní soustavy jsou potom jejich lineární kombinací. Podobně jako v případě partikulárního řešení \mathbf{x}_N budeme za dvě neznámé volit konkrétní čísla a zbylé tři neznámé dopočítáme. Aby hledaná řešení byla lineárně nezávislá, neznámé budeme volit tak, aby jedna neznámá byla nenulová a ostatní nulové, přičemž u jednotlivých bázových řešení bude nenulová vždy jiná neznámá, konkrétně pro naši soustavu určíme řešení \mathbf{v}_1 volbou $x_2 = 1, x_5 = 0$ a řešení \mathbf{v}_2 volbou $x_2 = 0, x_5 = 1$, tj.

$$\mathbf{v}_1 = [., 1, ., ., 0]^T, \mathbf{v}_2 = [., 0, ., ., 1]^T.$$

Zbylé neznámé v bázových řešeních $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ dopočítáme analogicky jako u partikulárního řešení, pouze nesmíme zapomenout na nulovost pravé strany. Tímto způsobem dostaneme

$$\mathbf{v}_1 = [-5, 1, 0, 0, 0]^T, \mathbf{v}_2 = [3, 0, 1/2, -6, 1]^T.$$

V případě řešení \mathbf{v}_2 lze vhodnější volbou $x_2 = 0, x_5 = 2$ získat řešení celočíselné, tj.

$$\mathbf{v}_2 = [6, 0, 1, -12, 2]^T.$$

Obecné řešení homogenní soustavy je lineární kombinací právě určených bázových řešení

$$\mathbf{x}_H = k_1 \cdot \mathbf{v}_1 + k_2 \cdot \mathbf{v}_2 = k_1 \cdot [-5, 1, 0, 0, 0]^T + k_2 \cdot [6, 0, 1, -12, 2]^T,$$

kde k_1, k_2 jsou libovolná reálná čísla.

Všechna řešení zadané soustavy získáme součtem partikulárního řešení \mathbf{x}_N a obecného řešení odpovídající homogenní soustavy \mathbf{x}_H :

$$\mathbf{x} = [2, 0, 2, -3, 0]^T + k_1 \cdot [-5, 1, 0, 0, 0]^T + k_2 \cdot [6, 0, 1, -12, 2]^T ,$$

kde k_1, k_2 jsou libovolná reálná čísla.

Příklad 4.2:

Určete všechny kořeny polynomu $p(x)$ a napište rozklad polynomu $p(x)$ na součin kořenových činitelů a reálný rozklad polynomu $p(x)$:

$$p(x) = 4x^7 - 32x^6 + 87x^5 - 52x^4 - 157x^3 + 222x^2 + 52x - 152.$$

Řešení:

Nejdříve se pokusíme najít všechny celočíselné kořeny polynomu $p(x)$. Víme, že tyto kořeny musí dělit absolutní člen polynomu, tedy v našem případě koeficient $a_7 = -152$. Celými čísly, která mohou být kořeny zadaného polynomu, jsou proto celočíselní dělitelé čísla -152 , konkrétně čísla

$$\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 19, \pm 38, \pm 76, \pm 152.$$

K ověření, zda číslo c je nebo není kořenem polynomu $p(x) = a_0 \cdot x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + a_2 \cdot x^{n-2} + \dots + a_{n-1} \cdot x + a_n$, použijeme Hornerovo schéma:

	a_0	a_1	a_2	a_3	\dots	a_{n-1}	a_n
c	q_0c	q_1c	q_2c	q_3c	\dots	$q_{n-2}c$	$q_{n-1}c$
	q_0	q_1	q_2	q_3	\dots	q_{n-1}	$r = p(c)$

Hornerovo schéma nahrazuje dělení polynomu $p(x)$ polynomem prvního stupně $x - c$, v posledním řádku tabulky dostáváme koeficienty "podílu" těchto polynomů a v posledním sloupečku ještě zbytek, který je současně funkční hodnotou $p(c)$. Platí tedy:

$$p(x) = (x - c) \cdot (q_0 \cdot x^{n-1} + q_1 \cdot x^{n-2} + q_2 \cdot x^{n-3} + \dots + q_{n-2} \cdot x + q_{n-1}) + r.$$

Je-li číslo c kořenem polynomu $p(x)$, je zbytek $r = p(c) = 0$, polynom $p(x)$ proto umíme rozložit na součin kořenového činitele $x - c$ a polynomu

$$q_0 \cdot x^{n-1} + q_1 \cdot x^{n-2} + q_2 \cdot x^{n-3} + \dots + q_{n-2} \cdot x + q_{n-1}.$$

Do tabulky, kde sloupce odpovídají jednotlivým mocninám proměnné x , napíšeme do prvního řádku všechny koeficienty polynomu $p(x)$. Tabulku doplníme nejdříve pro číslo $c = 1$:

$$\begin{array}{r|cccccccc}
1 & 4 & -32 & 87 & -52 & -157 & 222 & 52 & -152 \\
& & c.q_0 & c.q_1 & c.q_2 & c.q_3 & c.q_4 & c.q_5 & c.q_6 \\
\hline
& q_0 & q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 & q_6 & r = p(c)
\end{array}$$

Začneme tím, že v prvním sloupečku napíšeme $q_0 = 4$, součet čísel ve dvou řádcích nad vodorovnou čárou se totiž musí rovnat číslu pod vodorovnou čárou, zde ale není co přičítat ke koeficientu a_0 . Pak již umíme doprava nahoru dopočítat $c.q_0 = 1 \cdot 4 = 4$.

$$\begin{array}{r|cccccccc}
1 & 4 & -32 & 87 & -52 & -157 & 222 & 52 & -152 \\
& & 4 & c.q_1 & c.q_2 & c.q_3 & c.q_4 & c.q_5 & c.q_6 \\
\hline
& 4 & q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 & q_6 & r = p(c)
\end{array}$$

Koeficient q_1 dostaneme součtem dvou čísel ve druhém sloupečku, která už obě známe: $q_1 = a_1 + c.q_0 = -32 + 1 \cdot 4 = -28$, tedy:

$$\begin{array}{r|cccccccc}
1 & 4 & -32 & 87 & -52 & -157 & 222 & 52 & -152 \\
& & 4 & c.q_1 & c.q_2 & c.q_3 & c.q_4 & c.q_5 & c.q_6 \\
\hline
& 4 & -28 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 & q_6 & r = p(c)
\end{array}$$

Analogickým postupem doplníme celé Hornerovo schéma:

$$\begin{array}{r|cccccccc}
1 & 4 & -32 & 87 & -52 & -157 & 222 & 52 & -152 \\
& & 4 & -28 & 59 & 7 & -150 & 72 & 124 \\
\hline
& 4 & -28 & 59 & 7 & -150 & 72 & 124 & -28
\end{array}$$

Z této tabulky vidíme, že zbytek $r = p(1) = -28$ je nenulové číslo, proto číslo $c = 1$ není kořenem polynomu $p(x)$.

Jako další vyzkoušíme číslo $c = -1$, využijeme opět Hornerovo schéma.

$$\begin{array}{r|cccccccc}
-1 & 4 & -32 & 87 & -52 & -157 & 222 & 52 & -152 \\
& & -4 & 36 & -123 & 175 & -18 & -204 & 152 \\
\hline
-1 & 4 & -36 & 123 & -175 & 18 & 204 & -152 & 0 \\
& & -4 & 40 & -163 & 338 & -356 & 152 & \\
\hline
-1 & 4 & -40 & 163 & -338 & 356 & -152 & 0 & \\
& & -4 & 44 & -207 & 545 & -901 & & \\
\hline
& 4 & -44 & 207 & -545 & 901 & -1053 & &
\end{array}$$

Pro číslo -1 jsme použili tzv. opakované Hornerovo schéma. Tím, že v první tabulce vyšel zbytek nulový, víme, že číslo -1 je kořenem polynomu $p(x)$. My ale potřebujeme zároveň zjistit, jakou má tento kořen násobnost. Proto pokračujeme v tabulce, pouze se ale zmenšuje počet sloupců, s nimiž počítáme. S opakováním Hornerova schématu skončíme, pokud dostaneme nenulový

zbytek. V Hornerově schématu jsme dvakrát získali zbytek 0, potřetí již bylo zbytkem nenulové číslo. Proto je číslo -1 dvojnásobným kořenem polynomu $p(x)$, a samotný polynom $p(x)$ umíme rozložit na součin příslušného kořenového činitele $x - (-1)$ v druhé mocnině (mocnina vyjadřuje násobnost) a polynomu $p_1(x)$, jehož koeficienty nalezneme v tom řádku tabulky, kde jsme naposledy dostali nulový zbytek:

$$p(x) = (x + 1)^2 \cdot p_1(x) = \\ = (x + 1)^2 \cdot (4x^5 - 40x^4 + 163x^3 - 338x^2 + 356x - 152).$$

Je zřejmé, že všechny další kořeny polynomu $p(x)$ musí být již pouze kořeny polynomu $p_1(x)$, proto další Hornerovo schéma budeme počítat pro polynom $p_1(x)$ a číslo $c = 2$.

	4	-40	163	-338	356	-152
2		8	-64	198	-280	152
	4	-32	99	-140	76	0
2		8	-48	102	-76	
	4	-24	51	-38	0	
2		8	-32	38		
	4	-16	19	0		
2		8	-16			
	4	-8	3			

Číslo $c = 2$ je skutečně kořenem polynomu $p_1(x)$, a tedy i polynomu $p(x)$. Protože jsme v opakovaném Hornerově schématu třikrát dostali zbytek nulový, je číslo 2 kořenem násobnosti 3. Polynom $p(x)$ umíme dále rozložit:

$$p(x) = (x + 1)^2 \cdot (x - 2)^3 \cdot (4x^2 - 16x + 19).$$

Polynom $p_2(x) = 4x^2 - 16x + 19$, který se objevil v tomto rozkladu, má absolutní člen 19. Ze všech celých čísel, dělitelů původního absolutního členu -152 , tak přicházejí v úvahu už pouze čísla ± 19 . To je též důvod, proč můžeme případně vynechat poslední část Hornerova schématu, kořen 2 již není celočíselným dělitelem absolutního členu 19, počtvrté již v opakovaném Hornerově schématu pro $c = 2$ bude zbytek jistě nenulový.

Máme ještě najít zbylé dva kořeny - kořeny kvadratického polynomu $p_2(x) = 4x^2 - 16x + 19$. K jejich určení využijeme známý vzorec pro výpočet kořenů kvadratické rovnice

$$x_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 304}}{8} = 2 \pm \frac{i\sqrt{48}}{8} = 2 \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Známe již všechny kořeny polynomu $p(x)$, můžeme proto napsat rozklad polynomu na součin kořenových činitelů:

$$p(x) = 4 \cdot (x + 1)^2 \cdot (x - 2)^3 \cdot \left(x - 2 - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left(x - 2 + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Všimněme si především, že rozklad polynomu začíná konstantou 4, je to koeficient a_0 polynomu $p(x)$, který musí v rozkladu figurovat před součinem jednotlivých kořenových činitelů $x - c_i$.

Reálný rozklad polynomu $p(x)$ získáme tak, že pronásobíme kořenové činitele odpovídající dvojici komplexně sdružených kořenů, každé takové dvojici kořenů v reálném rozkladu odpovídá kvadratický výraz s reálnými koeficienty:

$$p(x) = 4 \cdot (x + 1)^2 \cdot (x - 2)^3 \cdot \left(x^2 - 4x + \frac{19}{4}\right).$$

Příklad 4.3:

Je dána matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -7 & 1 & 7 \\ 0 & -6 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

1. Určete vlastní čísla matice \mathbf{A} . Určete vlastní vektory příslušné k jednotlivým vlastním číslům matice \mathbf{A} .
2. K matici \mathbf{A} určete Jordanův kanonický tvar \mathbf{J} a matici \mathbf{T} , pro kterou platí $\mathbf{A} = \mathbf{T}\mathbf{J}\mathbf{T}^{-1}$.
3. Výpočtem součinu $\mathbf{T}\mathbf{J}\mathbf{T}^{-1}$ ověřte platnost vztahu $\mathbf{A} = \mathbf{T}\mathbf{J}\mathbf{T}^{-1}$.

Řešení:

1. Hledáme-li vlastní čísla matice \mathbf{A} řádu n , hledáme takové hodnoty λ , pro které se součin s nějakým **nenulovým** vektorem z prostoru \mathbf{R}_n rovná součinu matice \mathbf{A} a téhož vektoru:

$$\exists \mathbf{x} \in \mathbf{R}_n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0} : \lambda \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$$

Pokud do levé strany rovnosti přidáme před vektor \mathbf{x} jednotkovou matici \mathbf{I} řádu n , nic se nezmění: $\lambda \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$. Pak můžeme tuto rovnost ještě přepsat do tvaru

$$(\lambda \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

což je maticový zápis homogenní soustavy lineárních algebraických rovnic. My požadujeme, aby tato soustava měla nenulová řešení, to nastane pouze v případě, kdy homogenní soustava má nekonečně mnoho řešení. Matice $\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}$ této soustavy tedy musí být singulární, proto její determinant se musí rovnat nule. Protože determinant $\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \varphi(\lambda)$ je polynom stupně n v proměnné λ , nazýváme jej charakteristický polynom matice \mathbf{A} . Hledaná vlastní čísla jsou právě všechny kořeny charakteristického polynomu

$$\varphi(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}).$$

Vlastní vektor příslušný k vlastnímu číslu λ je potom každý **nenulový** vektor \mathbf{x} , pro který platí rovnost $(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Libovolné nenulové řešení soustavy $(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ je tedy hledaným vlastním vektorem k vlastnímu číslu λ . Protože všechna řešení homogenní soustavy lineárních algebraických rovnic tvoří podprostor, stačí určit jednu jeho bázi, tj. najít lineárně nezávislé generátory tohoto podprostoru. Všechny vlastní vektory lze pak získat jako netriviální lineární kombinace těchto bázevých prvků. Je přitom zvykem označovat názvem vlastní vektory právě jen tyto lineárně nezávislé generátory.

Vraťme se tedy k zadané matici \mathbf{A} . Nejdříve vypočítáme charakteristický polynom

$$\varphi(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \det \begin{bmatrix} \lambda + 7 & -1 & -7 \\ 0 & \lambda + 6 & -3 \\ 1 & -1 & \lambda + 2 \end{bmatrix}.$$

Uvědomme si, že nás zajímají především kořeny tohoto polynomu, proto je vhodné snažit se již při výpočtu determinantu získat rovnou rozklad na kořenové činitele tohoto polynomu. My proto můžeme např. ke druhému sloupci přičíst 1-násobek pivotního prvního sloupce, tím získáme ve druhém sloupci jeden nulový prvek a dvakrát výraz $\lambda + 6$, který v dalším kroku z determinantu vytkneme. Než uděláme rozvoj determinantu podle druhého sloupce, ještě přičteme k prvnímu řádku (-1) -násobek druhého řádku. Díky této úpravě zbyde ve druhém sloupci pouze jediné nenulové číslo.

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) &= \det \begin{bmatrix} \lambda + 7 & \lambda + 6 & -7 \\ 0 & \lambda + 6 & -3 \\ 1 & 0 & \lambda + 2 \end{bmatrix} = \\ &= (\lambda + 6) \cdot \det \begin{bmatrix} \lambda + 7 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & \lambda + 2 \end{bmatrix} = (\lambda + 6) \cdot \det \begin{bmatrix} \lambda + 7 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & \lambda + 2 \end{bmatrix} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\lambda + 6) \cdot 1 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \det \begin{bmatrix} \lambda + 7 & -4 \\ 1 & \lambda + 2 \end{bmatrix} = \\
&= (\lambda + 6) \cdot [\lambda^2 + 9\lambda + 18] = (\lambda + 6)^2 \cdot (\lambda + 3)
\end{aligned}$$

Přímo z vyjádření determinantu ve tvaru součinu kořenových činitelů snadno určíme vlastní čísla: $\lambda_{1,2} = -6, \lambda_3 = -3$.

Nyní určíme vlastní vektory k dvojnásobnému vlastnímu číslu $\lambda_{1,2} = -6$. Hledáme nenulová řešení homogenní soustavy lineárních algebraických rovnic $((-6)\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$, matici soustavy převedeme pomocí řádkových elementárních úprav na stupňovitý tvar.

$$(-6)\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rozdíl mezi řádem matice $((-6)\mathbf{I} - \mathbf{A})$ a její hodnotí je dimenzí podprostoru všech řešení homogenní soustavy, zde konkrétně je to $n - \text{hod}((-6)\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 3 - 2 = 1$. Stačí tedy určit jediné nenulové řešení, např. $\mathbf{v}_1 = [1, 1, 0]^T$, všechny ostatní vlastní vektory k vlastnímu číslu $\lambda_{1,2} = -6$ jsou jeho nenulové násobky.

Vlastní vektor k vlastnímu číslu $\lambda_3 = -3$ určíme analogicky jako řešení soustavy $((-3)\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Matici soustavy upravíme na stupňovitý tvar:

$$(-3)\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -7 \\ 0 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rozdíl $n - \text{hod}((-3)\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 3 - 2 = 1$ nám pouze potvrdil známý fakt, že vlastní vektory k jednonásobnému vlastnímu číslu musí vždy být prvky z jednodimenzionálního podprostoru. Za vlastní vektor k vlastnímu číslu $\lambda_3 = -3$ vyberme např. $\mathbf{v}_3 = [2, 1, 1]^T$, vlastním vektorem je i jeho libovolný nenulový násobek.

2. Jordanův kanonický tvar matice \mathbf{A} je matice \mathbf{J} podobná matici \mathbf{A} , která je v jistém smyslu "nejjednodušší", a sice má co možná nejvíce nulových prvků. Aby byly matice \mathbf{A} a \mathbf{J} podobné, musí existovat regulární matice \mathbf{T} taková, že platí $\mathbf{A} = \mathbf{T}\mathbf{J}\mathbf{T}^{-1}$.

Nejjednodušší je situace v případě, kdy má matice \mathbf{A} (řádu n) n různých vlastních čísel. Potom je matice \mathbf{J} diagonální, vlastní čísla napíšeme na diagonálu: $\mathbf{J} = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$, a matice \mathbf{T} se po sloupcích skládá

z příslušných vlastních vektorů \mathbf{v}_i k jednotlivým vlastním číslům λ_i (samozřejmě musíme dodržet pořadí odpovídající pořadí vlastních čísel na diagonále matice \mathbf{J}): $\mathbf{T} = [\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \dots | \mathbf{v}_n]$.

V našem zadání je ale vlastní číslo $\lambda_{1,2} = -6$ dvojnásobné. Obecně pro vícenásobná vlastní čísla musíme vždy určit počet tzv. Jordanových bloků (či Jordanových polí), která přísluší tomuto vlastnímu číslu. Počet Jordanových bloků k vlastnímu číslu λ_i matice \mathbf{A} je rozdíl $n - \text{hod}(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A})$, kde n je řád matice \mathbf{A} a hodnost matice $\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A}$ jsme již určili při hledání vlastních vektorů k vlastnímu číslu λ_i . Jordanův blok velikosti k je část matice o k řádcích a k sloupcích, kde vlastní číslo vyplní hlavní diagonálu a první "rovnoběžka" nad ní je vyplněna jedničkami, ostatní prvky jsou nulové:

$$J_k = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

V matici \mathbf{J} pak na diagonálu skládáme právě Jordanovy bloky. (Jednásobným vlastním číslům přísluší vždy Jordanovy bloky velikosti 1, což odpovídá tomu, co již bylo řečeno výše.)

Vraťme se nyní k našemu zadání a určíme, kolik Jordanových bloků bude příslušet dvojnásobnému vlastnímu číslu $\lambda_{1,2} = -6$. Protože rozdíl $n - \text{hod}((-6)\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 3 - 2 = 1$, přísluší vlastnímu číslu $\lambda_{1,2} = -6$ jeden Jordanův blok. Jordanův kanonický tvar \mathbf{J} matice \mathbf{A} tedy nebude matice diagonální, ale:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -6 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Matice \mathbf{T} , tzv. matice přechodu, se v nejjednodušším případě n různých vlastních čísel skládá z příslušných vlastních vektorů jako sloupců. My ale máme k dispozici pouze jeden lineárně nezávislý vlastní vektor $\mathbf{v}_1 = [1, 1, 0]^T$ k dvojnásobnému vlastnímu číslu $\lambda_{1,2} = -6$. Musíme proto určit tzv. zobecněný vlastní vektor k vlastnímu číslu $\lambda_{1,2} = -6$. Zobecněný vlastní vektor \mathbf{v}_2 hledáme jako jedno řešení nehomogenní soustavy lineárních algebraických rovnic s maticí soustavy $\lambda_{1,2} \mathbf{I} - \mathbf{A} =$

$(-6)\mathbf{I} - \mathbf{A}$ a sloupcem pravých stran $-\mathbf{v}_1$ (Pozor, nezapomeňte na znaménko minus!):

$$((-6)\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = -\mathbf{v}_1$$

K nalezení řešení využijeme Gaussovu eliminační metodu.

$$\begin{aligned} [(-6)\mathbf{I} - \mathbf{A} | -\mathbf{v}_1] &= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & -4 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \end{array} \right] \sim \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Tato nehomogenní soustava má samozřejmě nekonečně mnoho řešení, nám ale stačí vybrat si kteroukoliv uspořádanou trojici reálných čísel, která bude jejím řešením, například $\mathbf{v}_2 = [1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]^T$.

Matice \mathbf{T} potom bude mít za první dva sloupce vlastní vektor \mathbf{v}_1 a zobecněný vlastní vektor \mathbf{v}_2 příslušné k vlastnímu číslu $\lambda_{1,2} = -6$, třetím sloupcem matice \mathbf{T} je vlastní vektor \mathbf{v}_3 příslušný k vlastnímu číslu $\lambda_3 = -3$:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}.$$

Poznámka:

Obecně se může samozřejmě stát, že Jordanův blok příslušný k vícenásobnému vlastnímu číslu λ_i má větší velikost než dvě, tj. že do jedné části matice \mathbf{T} potřebujeme více sloupců než dva. V tomto případě určujeme tzv. řetězec zobecněných vlastních vektorů k vlastnímu číslu λ_i . První zobecněný vlastní vektor \mathbf{v}_2 nalezneme jako jedno řešení nehomogenní soustavy $(\lambda_i\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = -\mathbf{v}_1$, další zobecněný vlastní vektor \mathbf{v}_3 určujeme jako řešení nehomogenní soustavy $(\lambda_i\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = -\mathbf{v}_2$, zobecněný vlastní vektor \mathbf{v}_4 je řešením nehomogenní soustavy $(\lambda_i\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = -\mathbf{v}_3$, atd. Tímto způsobem určíme řetězec zobecněných vlastních vektorů potřebné délky.

Poznámka:

Zvídavého studenta již určitě napadla otázka, jak poznáme počet Jordanových bloků, případně i jejich velikost v případě, kdy se jedná o vícenásobné vlastní číslo λ_i násobnosti větší než tři v matici \mathbf{A} (řádu většího

než tři). Pak už informace pouze o počtu příslušných Jordanových bloků (velikosti alespoň jedna) nemusí stačit. V této situaci spočítáme druhou mocninu $(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A})^2$ matice $\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A}$, určíme její hodnotu a právě rozdíl hodnot

$$\text{hod}(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A}) - \text{hod}((\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A})^2)$$

udává počet Jordanových bloků velikosti alespoň 2, podobně můžeme počet Jordanových bloků velikosti alespoň 3 poznat z rozdílu

$$\text{hod}((\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A})^2) - \text{hod}((\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A})^3),$$

a případně pokračovat dále analogicky. Jordanův kanonický tvar \mathbf{J} dané matice \mathbf{A} je tedy vždy určen jednoznačně.

3. K vyřešení posledního úkolu v příkladu potřebujeme určit ještě matici \mathbf{T}^{-1} inverzní k matici podobnosti \mathbf{T} . Užijeme např. výpočet pomocí determinantů, tj. pomocí adjungované matice k matici \mathbf{T} . Determinant $\det \mathbf{T}$ určíme např. užitím Sarrusova pravidla:

$$\det \mathbf{T} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3} + 0 + \frac{2}{3} - 0 - \frac{1}{3} - 1 = -1.$$

Adjungovanou maticí \mathbf{T}^A k matici \mathbf{T} je transponovaná matice k matici algebraických doplňků. Snadno tedy dopočítáme inverzní matici \mathbf{T}^{-1} :

$$\mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{T}} \cdot \mathbf{T}^A = \frac{1}{-1} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ -1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 3 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Protože již známe i matici \mathbf{T}^{-1} , vypočítáme požadovaný součin

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \mathbf{J} \mathbf{T}^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -6 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{T}^{-1} = \\ &= \begin{bmatrix} -6 & -5 & -6 \\ -6 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 3 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} -21 & 3 & 21 \\ 0 & -18 & 9 \\ -3 & 3 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 1 & 7 \\ 0 & -6 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}.$$

Vynásobením matic $\mathbf{T} \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{T}^{-1}$ jsme ověřili platnost vztahu $\mathbf{A} = \mathbf{T} \mathbf{J} \mathbf{T}^{-1}$. Je to pro nás i kontrola, že jsme tento příklad vyřešili bez numerických či jiných chyb.