

KOMPLEXNÍ EXPONENCIÁLA

CZP

Ing. Vladimír Pavlíček, Ph.D.

Katedra aplikované elektroniky a telekomunikací

Fakulta elektrotechnická
Západočeská univerzita v Plzni

2009-2021 ©

Komplexní exponenciála

- Ve spojitém čase
 - Periodicita, její harmonické složky
- V diskrétním čase
 - Periodicita, její harmonické složky
- Příklady

Harmonické signály

- Speciální případ komplexní exponenciály
- *α je ryze komplexní ($\alpha = jd$)*

- *Spojité čas* vs. *Diskrétní čas*

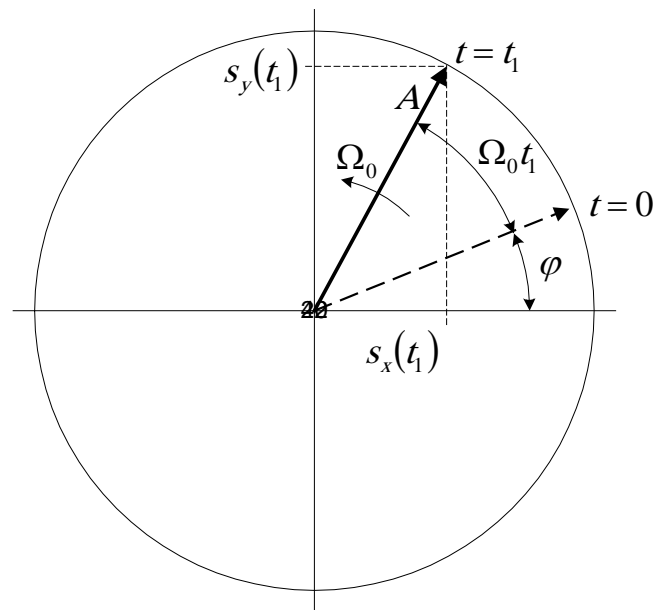
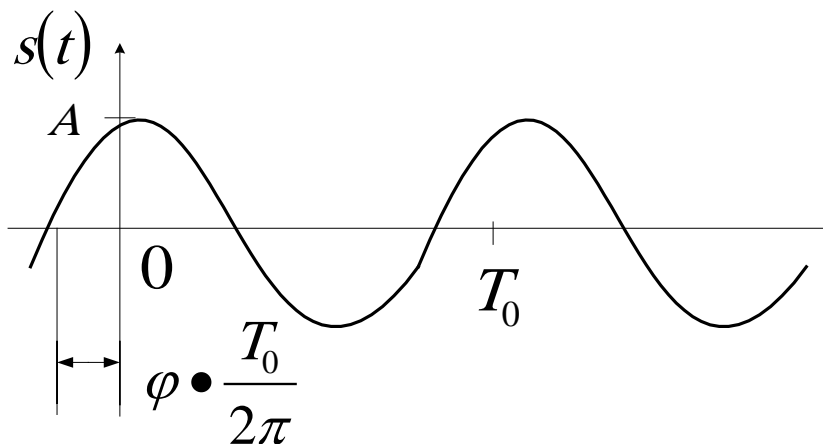
$$x(t) = Ae^{\alpha t}$$

$$x[n] = Ae^{\alpha n}$$

Obecně – ve spojitém čase (C-T)

- Rotující vektor (Eulerův vztah)

$$\hat{s}(t) = A * e^{j(\Omega_0 t + \varphi)} = A * [\cos(\Omega_0 t + \varphi) + j \sin(\Omega_0 t + \varphi)]$$



Složky harmonické funkce

$$s_x(t) = A \cos(\Omega_0 t + \varphi) = \operatorname{Re}[\hat{s}(t)]$$

$$s_y(t) = A \sin(\Omega_0 t + \varphi) = \operatorname{Im}[\hat{s}(t)]$$

$\phi(t_0)$ - počáteční fáze

Komplexní exp. – spojitý čas (C-T)

- Základní tvar $x(t) = e^{j\Omega t}$
- Periodicita $x(t) = e^{j\Omega_0 t} = e^{j\Omega_0(t+T)} = e^{j\Omega_0 t} e^{j\Omega_0 T}$
- Podmínka periodicity $e^{j\Omega_0 T} = 1 = e^{j2k\pi} ; k = 0,1,2,3,..$
- Vždy existuje perioda T , která splňuje rovnici: $\Omega_0 T = 2k\pi$
- A základní perioda T_0 je: $T_0 = \frac{2\pi}{|\Omega_0|} ; \Omega_0 \neq 0, k = 1$

Výsledek

Základní perioda T_0 ($k=1$) existuje vždy a to pro jakékoliv Ω_0

.. a její harmonicky vázané C-T K.Exp.

- Harmonicky vázané spojité (C-T) komplexní exponenciály jsou vyjádřeny takto:

$$\Phi_k(t) = e^{jk\Omega_0 t}$$

- Počet harmonických složek $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm \infty$

není omezen, protože se zvyšujícím se k se zkracuje doba periody a tedy zvyšuje se frekvence signálu

- Vyšší harmonické existují pro: jakoukoliv Ω_0

- Závěr

Ve spojitém světě existuje neomezený počet vyšších harmonických složek pro jakoukoliv spojitou frekvenci Ω_0

Komplexní exp. – diskrétní čas (D-T)

- Mějme: $x(t) = e^{j\Omega t} : \text{spoj.čas}$
 $t \rightarrow nT_s$
 $x(n) = x(nT_s) = e^{j\Omega nT_s} : \text{diskrétní čas}$
- Platí:
 $\omega = \Omega * T_s \text{ [rad, rad / s, s]}$
 $= 2\pi f * T_s = 2\pi f / f_s$
kde ω [rad] je normovaná úhlová frekvence
- Pak:
 $x(n) = e^{j\omega n}$ kde n říká číslo generovaného vzorku K.exp.
 $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Periodicita diskrétní k.exp.

- Kritérium periodicity

$$e^{j\Omega T_s n} = e^{j\omega_N n} = e^{j\omega_N (n+N)} = e^{j\omega_N n} e^{j\omega_N N}$$

- Nebo jinak (např. pouze sin složky):

$$\sin(\Omega n T_s) = \sin(\Omega (n+N) T_s) = \sin(\Omega n T_s + \Omega N T_s)$$

- Podmínka vyžaduje řešit rovnici:

$$e^{j\omega_N N} = 1 \quad \Rightarrow \quad \omega_N N = 2k\pi$$

- Což dá:

$$\omega_N = 2\pi \frac{k}{N} [\text{rad}] \quad \Rightarrow \quad \text{perioda} : N = 2\pi \frac{k}{\omega_N} \quad [\text{vzorků}]$$

Diskrétní (D-T) k.exp. - závěr

- D-T k.exp. NENÍ periodická pro všechny ω_N
- D-T k.exp. jsou periodické POUZE pro celočíselné násobky 2π , tj. pouze v případě, že nalezneme \underline{k} (celočíselné) takové, aby \underline{N} (počet vzorků perody) v rovnici:

$$N = 2\pi \frac{k}{\omega_N}, \quad \underline{\text{bylo celé číslo.}}$$

- Tedy: pokud nalezneme \underline{k} a \underline{N} jako celá čísla, říkáme, že diskrétní (D-T) k.exp. má periodu \underline{N} vzorků.
- Když $\underline{k}=1$, D-T k.exp. má tzv. ZÁKLADNÍ PERIODU \underline{N}
- Když nalezneme $\underline{k}>1$, říkáme, že D-T k.exp. je periodická, ale ne v základní periodě (tzv. NÁSOBNÁ PERIODA).
- Když není možné nalézt celočíselné \underline{k} takové, aby \underline{N} bylo celé číslo, pak říkáme že D-T k.exp. NEMÁ PERIODU.

Diskrétní (D-T) k.exp. – ZÁVĚR

- 3 typy diskretní k.exp.
 - Harmonický signál má ZÁKLADNÍ PERIODU (pro $k=1$ nalezneme celočísl. N [vz./periodu], a pro tento signál pak EXISTUJÍ harmonicky vázané diskretní (D-T) k.exp. (tzv.vyšší harmonické). Takovéto signály (frekvence) jsou pak vhodné pro použití v harmonických analýzách (např. DFT)
 - Harmonický signál má tzv. NÁSOBNOU PERIODU (tj.lze nalézt int $k>1$ takové, že nalezneme int N [vz./per]). Takový diskretní signál je periodický přes násobky základní periody – obdobně platí pro vyšší harmonické -> V případě, že se tato perioda bere jako základní, může se použít v DFT
 - Harmonický signál NENÍ PERIODICKÝ VŮBEC (tj.nelze nalézt int k takové, aby N bylo také celé číslo). Takovýto diskretní harmonický signál není periodický -> NEEXISTUJÍ vyšší harmonické složky -> takovýto signál není vhodný pro použití v rozkladu DFT

Příklady

■ Př.1:

- Mějme signál: $x(n) = \sin(0.6n), n = 0, 1, 2, 3, \dots$

- Existuje perioda?

- Řešením rovnice: $N = 2\pi k / 0.6$

- Zjistíme, že neexistuje k takové, aby N bylo celé číslo.

■ Závěr

- Tento signál nemá periodu a tudíž pro něj neexistují ani vyšší harmonické složky

Příklady

■ Př.2:

■ Mějme signál: $x(n) = \sin(8\pi n/31), n = 0, 1, 2, 3, \dots$

■ Otázka: Existuje perioda?

■ Řešením:
$$N = 2\pi \frac{k}{8\pi} * 31$$

■ Nalezneme $k=4$ a $N = 31$.

■ Tzn. Že tento signál je periodický přes 4 periody signálu, počet vzorků na periodu je 31.

■ Závěr

■ Tento signál má násobnou periodu přes 4 základní periody. Základní perioda je $31/4 = 7.75$ [vzorků]. Tento signál NENÍ vhodný jako základní perioda pro generování vyšších harmonických složek používaných v DFT, nicméně může být součástí.

ZÁVĚR

- NE VŠECHNY diskrétní harmonické signály jsou periodické
- Pro generování vyšších harmonických složek, potřebujeme nejlépe diskrétní signály pouze se ZÁKLADNÍ periodou ($k=1$)

- Tj.:

$$\omega_0 = \omega_N \Big|_{k=1} = \frac{2\pi k}{N}$$

- Jinak řečeno: Pro $k = 1$ dostaneme ZÁKLADNÍ periodu N diskrétního harmonického signálu

ZÁVĚR - pokračování

- Když N je celé číslo (a existují tedy vyšší harmonické), pak tento počet vyšších harmonických je omezený (limitovaný).

- Dále:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} T_s \Rightarrow T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} T_s \Rightarrow \frac{2\pi}{2\pi} N T_s \Rightarrow T_0 = N T_s$$

$$kde \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{N} \quad \text{je základní perioda} \\ \text{diskrétního harmon.signálu}$$

- Základní perioda T_0 je rovna počtu vzorků N krát T_s
- Toto je důvod, proč se délka bufferu u DFT bere jako základní perioda signálu.

ZÁVĚR - pokračování

- Množina vyšších harmonických diskrétního harm.signálu nebo jinak D-T k.exp.se popisuje takto:

$$\Phi_k(n) = e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \quad ; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \pm (N-1)$$

- Proč pouze (N-1) harmonických složek? - Periodicita!
- Protože:

$$\Phi_{k+N}(n) = e^{j(k+N)\frac{2\pi}{N}n} = e^{jk\frac{2\pi}{N}n} e^{jN\frac{2\pi}{N}n} = \Phi_k(n)$$

- Tj. V množině funkcí existuje pouze N různých harmonicky vázaných diskrétních komplexních exponenciál

$$\Phi_0(n), \Phi_1(n), \dots, \Phi_{N-1}(n)$$

Příklad na harmonicky vázané signály

- Mějme diskrétní k.exp (tj.harmonickou funkci) o frekvenci:

$$\omega_0 = \omega_N \Big|_{k=1} = \frac{2\pi}{N} = \frac{2\pi}{8}, \quad \text{kde } N \text{ jsme zvolili } N = 8$$

- Periodicita?

$$N = \frac{2k\pi}{\omega_0} = \frac{2k\pi}{\frac{2\pi}{8}} = 8k$$

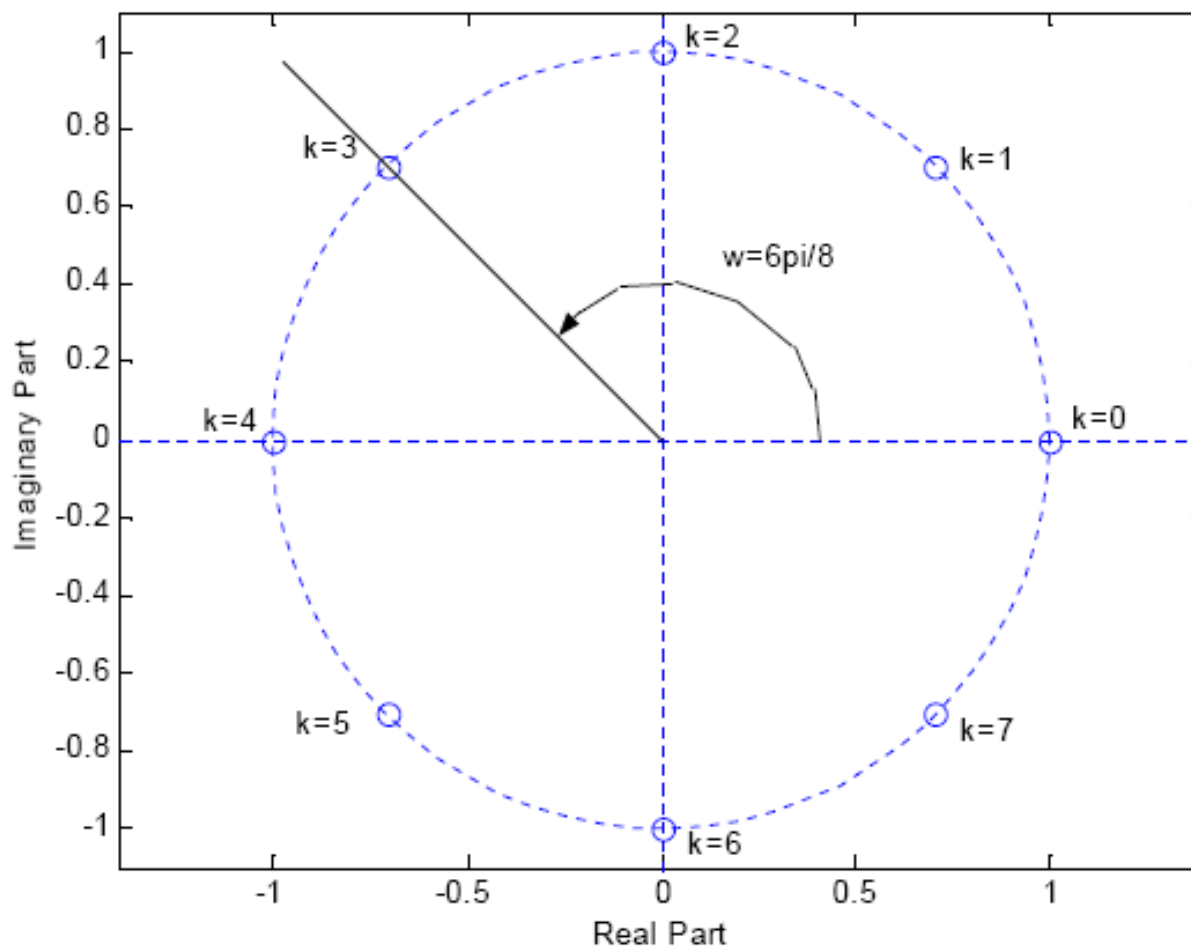
- Pro $k = 1$ nalezneme $N=8$. Takovýto signál má ZÁKLADNÍ PERIODU a existuje tedy $(N-1)$, tj. 7 vyšších harmonických
- Pro vyšší harmonické pak dostáváme:

$$\Phi_k[n] = e^{jk\omega_0 n} = e^{jk\frac{2\pi}{8}n}, \quad k = 0,1,2,\dots,(N-1)$$
$$n = 0,1,2,\dots,(N-1)$$

Vyčíslení harmonických složek

Index harmonické složky k	Harmonická frekvence ω	Harmonická funkce $\Phi_k[n]$	Výpočet periody	Perioda N	Celočíselný index m k určení periody
0	0	e^{j0n}	stejnoseměrný signál	-	-
1	$\frac{2\pi}{8}$	$e^{j\frac{2\pi}{8}n}$	$N = m \frac{2\pi}{\omega_0}$	N = 8	m = 1
2	$\frac{4\pi}{8}$	$e^{j\frac{4\pi}{8}n}$	dtto	N = 4	m = 1
3	$\frac{6\pi}{8}$	$e^{j\frac{6\pi}{8}n}$	$N = m \frac{2\pi}{6\pi} 8 = m \frac{16}{6}$	N = 8	m = 3
4	$\frac{\pi}{8}$	$e^{j\frac{8\pi}{8}n} = e^{jm}$	dtto	N = 2	m = 1
5	$\frac{10\pi}{8}$	$e^{j\frac{10\pi}{8}n}$	dtto	N = 8	m = 5
6	$\frac{12\pi}{8}$	$e^{j\frac{12\pi}{8}n}$	dtto	N = 4	m = 3
7	$\frac{14\pi}{8}$	$e^{j\frac{14\pi}{8}n}$	dtto	N = 8	m = 7

Příklad zobrazení frekvence



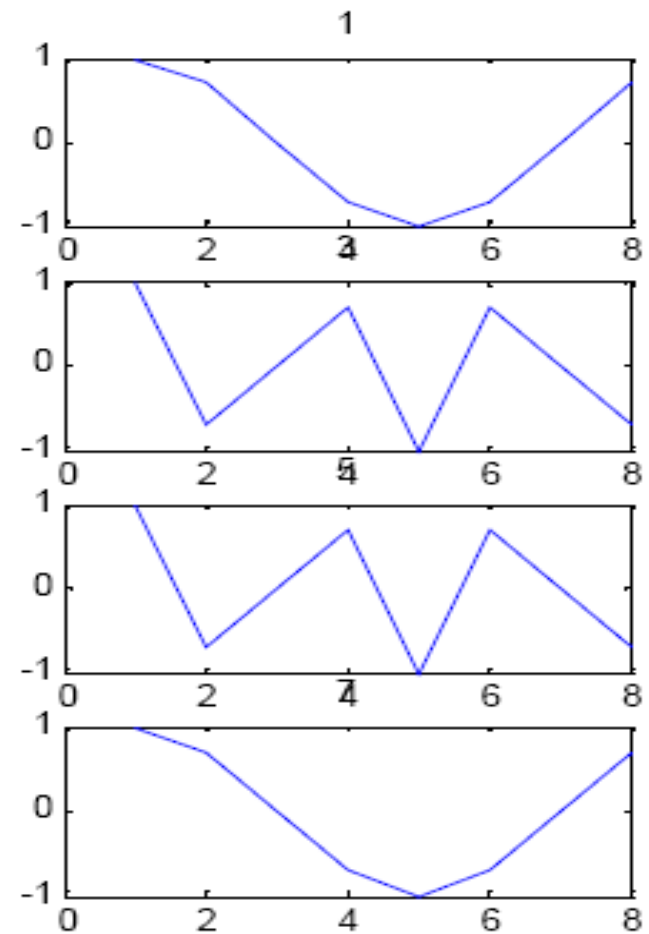
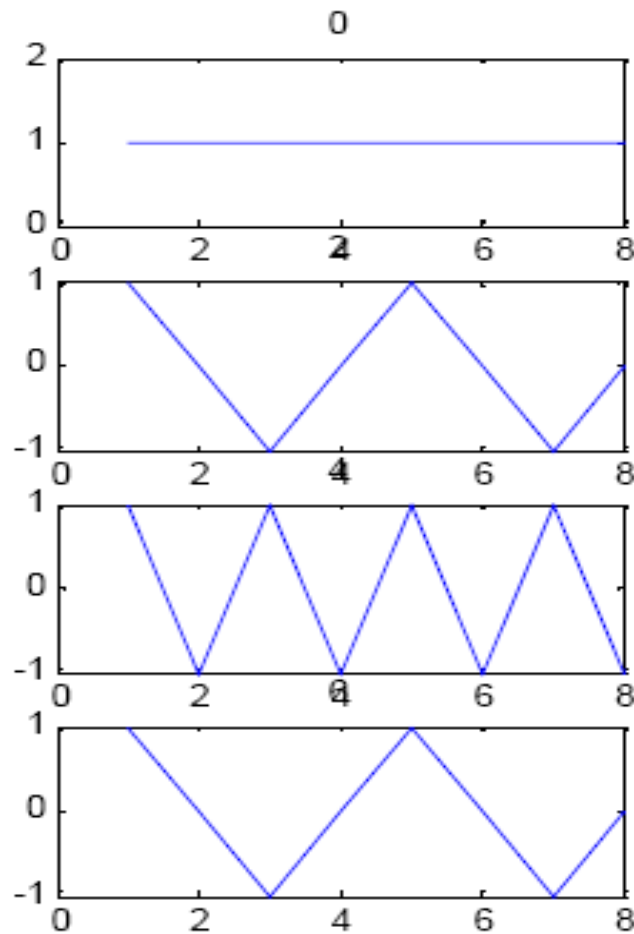
Vysvětlení

- Pro danou frekvenci $\omega = \frac{6\pi}{8}$,

kde $k=3$ a $N=8$, dostaneme opět stejné vzorky po 3 otočkách kolem jednotkové kružnice, tj. po vygenerování 8 vzorků takovéto frekvence

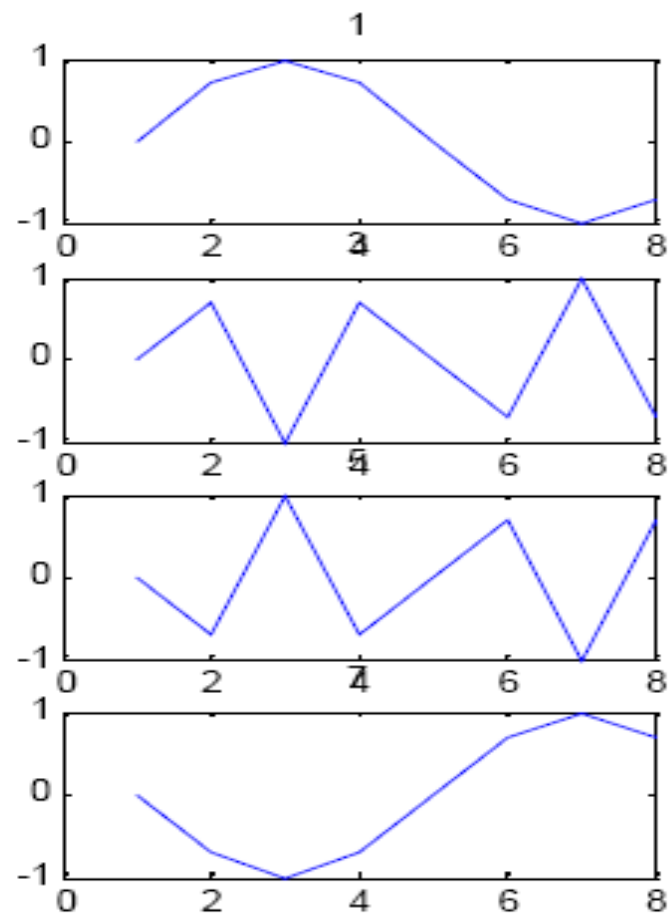
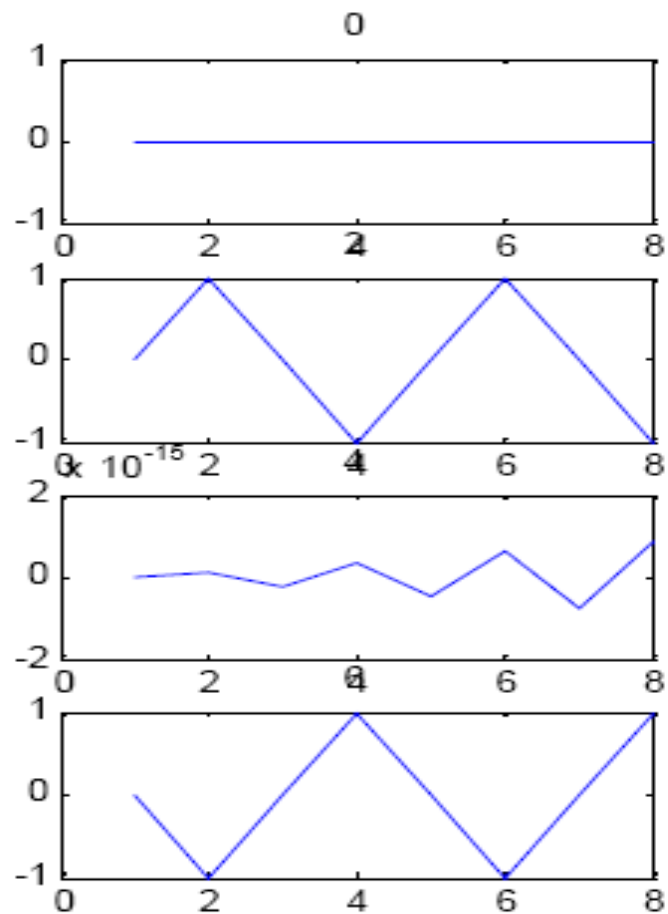
Je zjevné, že je to NÁSOBNÁ perioda se základní periodou $8/3$

Reálná část harmonických složek



komplexní exponenciála

Imaginární část harmonických složek signálu



- A platí:

$$\operatorname{Re}\{\Phi_0\} = 1$$

$$\operatorname{Re}\{\Phi_1\} = \operatorname{Re}\{\Phi_7\}$$

$$\operatorname{Re}\{\Phi_2\} = \operatorname{Re}\{\Phi_6\}$$

$$\operatorname{Re}\{\Phi_3\} = \operatorname{Re}\{\Phi_5\}$$

$$\operatorname{Re}\{\Phi_4\} \equiv fs / 2$$

$$\operatorname{Im}\{\Phi_0\} = 0$$

$$\operatorname{Im}\{\Phi_1\} = -\operatorname{Im}\{\Phi_7\}$$

$$\operatorname{Im}\{\Phi_2\} = -\operatorname{Im}\{\Phi_6\}$$

$$\operatorname{Im}\{\Phi_3\} = -\operatorname{Im}\{\Phi_5\}$$

$$\operatorname{Im}\{\Phi_4\} = 0$$

- Více bude o použití harmonicky vázaných diskrétních komplexních exponenciál pojednáno v kapitole o DFT