

## Řešené příklady z lineární algebry - část 0

Řešení soustav lineárních algebraických rovnic převedením rozšířené matice soustavy na redukovaný stupňovitý tvar

**Příklad 0.1:** Určete všechna řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned}3x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 1, \\2x_1 - x_2 - 3x_3 &= 1, \\-x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 5, \\2x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= -4.\end{aligned}$$

**Řešení:**

Soustavu lineárních algebraických rovnic budeme řešit Gaussovou eliminační metodou. Rozšířenou matici soustavy upravíme pomocí řádkových elementárních úprav na redukovaný stupňovitý tvar s pivotními prvky 1.

**Matice soustavy v redukovaném stupňovitém tvaru s pivotními prvky 1** je taková matice, kdy žádné dva řádky nemohou začínat prvním nenulovým prvkem (tzv. pivotním prvkem) od stejného sloupce, samotné pivotní prvky jsou 1 a navíc ve sloupcích, kde jsou pivotní prvky, jsou všechny ostatní prvky nulové. Využíváme přitom **řádkové elementární úpravy**, kam patří:

- vzájemná výměna dvou řádků,
- vynásobení řádku nenulovým číslem,
- přičtení násobku jednoho řádku (tzv. pivotního řádku) k jinému řádku.

Koeficienty zadané soustavy zapíšeme do rozšířené matice soustavy a tu pak začneme upravovat.

$$\begin{aligned}[\mathbf{A}|\mathbf{b}] &= \left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & 1 \\ -1 & -2 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & -4 & -4 \end{array} \right] \sim \\ &\sim \left[ \begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -5 \\ 0 & -5 & 3 & 11 \\ 0 & -2 & 7 & 16 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{array} \right]\end{aligned}$$

První fázi úprav jsme začali výběrem vhodného pivotního prvku v prvním sloupci matice, je to číslo  $-1$  ve třetím řádku, proto nejprve vyměníme první a třetí řádek matice. Čtvrtý řádek současně vynásobíme číslem  $1/2$ . Dále budeme přičítáním vhodných násobků pivotního prvního řádku eliminovat první neznámou ze zbylých řádků, tj. k druhému řádku přičteme 2-násobek, ke třetímu řádku 3-násobek a ke čtvrtému řádku 1-násobek pivotního prvního řádku. Pokud nyní ještě vynásobíme první řádek číslem  $-1$ , zajistíme, aby pivotním prvkem v prvním řádku byla jednička. První řádek tak splnil svoji roli pivotního řádku v první fázi úprav, při dalších úpravách rozšířené matice soustavy na stupňovitý tvar jej nebudeme potřebovat (jeho případné užití by "pokazilo" získaný tvar prvního sloupce).

V další fázi úprav se zaměříme na druhý sloupec, pivotní prvek vybíráme z čísel  $-5, -2, -1$ , vhodným pivotním prvkem může být číslo  $-1$ . Vyměníme proto druhý a čtvrtý řádek. Druhý řádek po této úpravě využijeme jako pivotní a ke třetímu řádku přičteme jeho  $(-2)$ -násobek a ke čtvrtému řádku jeho  $(-5)$ -násobek. Takto získáme další stupeň v požadovaném tvaru matice, k vylepšení pivotního prvku na číslo 1 ještě vynásobíme druhý řádek číslem  $-1$ :

$$\dots \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 7 & 16 \\ 0 & -5 & 3 & 11 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array} \right]$$

K získání stupňovitého tvaru matice už stačí pouze třetí řádek vynásobit číslem  $1/5$ , resp. čtvrtý řádek číslem  $-1/2$ . Oba takto upravené řádky jsou shodné, proto přičtením  $(-1)$ -násobku třetího řádku ke čtvrtému získáme řádek ze samých nul.

$$\dots \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Matice soustavy má stupňovitý tvar a všechny pivotní prvky jsou jedničky. Redukovaný stupňovitý tvar potřebuje ještě nuly nad pivotními prvky. Začneme třetím sloupcem, k prvnímu řádku přičteme 3-násobek a k druhému řádku 1-násobek pivotního třetího řádku. Poslední chybějící nulu ve druhém sloupci získáme, když k prvnímu řádku přičteme  $(-2)$ -násobek pivotního druhého řádku.

$$\dots \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Rozšířenou matici zadané soustavy jsme převedli pomocí řádkových elementárních úprav na redukovaný stupňovitý tvar s pivotními prvky 1, tomuto tvaru odpovídá soustava

$$\begin{aligned} x_1 &= 3, \\ x_2 &= -1, \\ x_3 &= 2. \end{aligned}$$

Zadaná soustava má tedy právě jedno řešení, je jím přímo trojice

$$\mathbf{x} = [3, -1, 2]^T.$$

**Příklad 0.2:** Určete všechna řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 - 4x_5 &= 4, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 + 23x_5 &= -13, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 - 11x_5 &= 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 + 22x_5 &= -7. \end{aligned}$$

**Řešení:**

Soustavu lineárních algebraických rovnic budeme opět řešit Gaussovou eliminační metodou. Rozšířenou matici soustavy upravíme pomocí řádkových elementárních úprav na redukovaný stupňovitý tvar s pivotními prvky 1.

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}|\mathbf{b}] &= \left[ \begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 4 & 3 & -4 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & -3 & 23 & -13 \\ 1 & -2 & 5 & 3 & -11 & 5 \\ 2 & 3 & -4 & -2 & 22 & -7 \end{array} \right] \sim \\ &\sim \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 5 & 3 & -11 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & -3 & 23 & -13 \\ 2 & -1 & 4 & 3 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & -4 & -2 & 22 & -7 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 5 & 3 & -11 & 5 \\ 0 & 8 & -16 & -12 & 56 & -28 \\ 0 & 3 & -6 & -3 & 18 & -6 \\ 0 & 7 & -14 & -8 & 44 & -17 \end{array} \right] \end{aligned}$$

První fázi úprav jsme začali výběrem vhodného pivotního prvku v prvním sloupci matice, je to číslo 1 ve třetím řádku, proto nejprve vyměníme první

a třetí řádek matice. Dále budeme přičítáním vhodných násobků pivotního prvního řádku eliminovat první neznámou ze zbylých řádků, tj. k druhému řádku přičteme  $(-3)$ -násobek, ke třetímu řádku  $(-2)$ -násobek a ke čtvrtému řádku též  $(-2)$ -násobek pivotního prvního řádku. První řádek tak splnil svoji roli pivotního řádku v první fázi úprav, při dalších úpravách rozšířené matice soustavy na stupňovitý tvar jej budeme zatím pouze opisovat.

V další fázi úprav se zaměříme na druhý sloupec, žádné z čísel 8, 3, 7 ale není vhodným pivotním prvkem. Pivotní prvek  $-1$  dostaneme např. tak, že ke čtvrtému řádku přičteme  $(-1)$  -násobek druhého řádku. Dále vyměníme druhý a čtvrtý řádek matice a zároveň nový čtvrtý řádek vynásobíme číslem  $1/4$ . Po této úpravě využijeme druhý řádek jako pivotní a ke třetímu řádku přičteme jeho 3-násobek a ke čtvrtému řádku jeho 2-násobek. Takto získáme další stupeň v požadovaném tvaru matice:

$$\begin{aligned} \dots &\sim \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 5 & 3 & -11 & 5 \\ 0 & 8 & -16 & -12 & 56 & -28 \\ 0 & 3 & -6 & -3 & 18 & -6 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & -12 & 11 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 5 & 3 & -11 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & -12 & 11 \\ 0 & 3 & -6 & -3 & 18 & -6 \\ 0 & 2 & -4 & -3 & 14 & -7 \end{array} \right] \\ &\sim \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 5 & 3 & -11 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & -12 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -18 & 27 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -10 & 15 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Nyní můžeme třetí řádek vynásobit číslem  $1/9$  a čtvrtý řádek číslem  $1/5$ , oba řádky pak budou stejné. Stupňovitý tvar matice získáme tak, že ke čtvrtému řádku přičteme  $(-1)$  -násobek třetího řádku. Pokud navíc druhý řádek vynásobíme číslem  $-1$ , budou již všechny pivotní prvky rovny 1.

$$\dots \sim \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 5 & 3 & -11 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & -12 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 5 & 3 & -11 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -4 & 12 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Aby matice byla v redukovaném stupňovitém tvaru, potřebujeme ještě získat nuly nad pivotními prvky ve druhém a čtvrtém sloupci. Začneme čtvrtým sloupcem, k prvnímu řádku přičteme  $(-3)$ -násobek a k druhému řádku 4-násobek pivotního třetího řádku. Poslední chybějící nulu ve druhém sloupci dostaneme tak, že k prvnímu řádku přičteme 2-násobek pivotního druhého řádku.

$$\dots \sim \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 5 & 0 & -5 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Poslední matice je v požadovaném redukovaném stupňovitém tvaru s pivotními prvky 1, odpovídá jí soustava lineárních algebraických rovnic

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & & + & x_3 & + & 3x_5 & = & -2, \\ & x_2 & - & 2x_3 & & + & 4x_5 & = & 1, \\ & & & & x_4 & - & 2x_5 & = & 3. \end{array}$$

Počet rovnic poslední soustavy je menší než počet neznámých, znamená to, že soustava bude mít nekonečně mnoho řešení. Všechna řešení soustavy získáme následujícím způsobem.

Z jednotlivých rovnic vyjádříme první neznámé, neboť tyto neznámé odpovídají pivotním prvkům 1. Zbylé dvě neznámé mohou být libovolné, např.  $x_3 = t$  a  $x_5 = s$ , kde  $t, s \in \mathbf{R}$  jsou tzv. parametry řešení. Potom

$$\begin{aligned} x_1 &= -2 - x_3 - 3x_5 = -2 - t - 3s, \\ x_2 &= 1 + 2x_3 - 4x_5 = 1 + 2t - 4s, \\ x_4 &= 3 + 2x_5 = 3 + 2s. \end{aligned}$$

Všechna řešení zadané soustavy pak zapíšeme jako uspořádanou pěticí  $\mathbf{x}$  :

$$\mathbf{x} = [-2 - t - 3s, 1 + 2t - 4s, t, 3 + 2s, s]^T,$$

resp.

$$\mathbf{x} = [-2, 1, 0, 3, 0]^T + t \cdot [-1, 2, 1, 0, 0]^T + s \cdot [-3, -4, 0, 2, 1]^T,$$

kde  $t, s$  jsou libovolná reálná čísla.

### Poznámka:

Později se naučíme určovat řešení soustav ještě jiným způsobem, k tomu jsou ale zapotřebí hlubší znalosti o lineárních prostorech a lineárních zobrazeních.