FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD
ZÁPADOČESKÉ UNIVERZITY
V PLZNI

KATEDRA
MATEMATIKY

KMA/GKP GEOMETRIE KŘIVEK A PLOCH

Opakování lineární algebry a geometrie

Osnova

Lineární algebra

- Lineární algebra studuje vektorové prostory a lineární zobrazení mezi nimi.
- Základními objekty jsou:
  - vektory a operace s nimi (sčítání, násobení skalárem),
  - báze a soustavy souřadnic (jak vektory zapisujeme),
  - matice jako praktický zápis lineárních zobrazení,
  - skalární součin (délky, úhly),
  - vlastní čísla a vlastní vektory (směry, které se transformací nemění).
- Lineární algebra tvoří základní stavební kámen matematiky a aplikací
- Na jejích pojmech a metodách je postavena celá řada dalších disciplín, například
  - geometrie,
  - numerická matematika,
  - optimalizace,
  - fyzika,
  - počítačová grafika,
  - strojové učení.

Vektorový prostor

- Základním algebraickým objektem, se kterým budeme pracovat, je vektorový prostor.

Definice (Vektorový prostor)

Vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{R}$ je množina V, jejíž prvky nazýváme vektory, na které jsou definovány dvě operace:

- sčítání vektorů: $+ : V \times V \to V$, značíme $\vec{u} + \vec{v}$ $\quad \big(\forall \vec{u}, \vec{v} \in V : \ \vec{u} + \vec{v} \in V\big)$,
- násobení skalárem: $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$, značíme $\alpha\vec{v}$ $\quad \big(\forall \vec{v} \in V, \ \forall \lambda \in \mathbb{R} : \ \lambda\vec{v} \in V\big)$,

tak, že pro všechna $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ platí následující axiomy:

1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$,
2. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$,
3. Existuje nulový vektor $\vec{0} \in V$, že $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$,
4. Ke každému $\vec{v} \in V$ existuje $-\vec{v} \in V$, že $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$,
5. $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$,
6. $(\alpha + \beta)\vec{v} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}$,
7. $(\alpha\beta)\vec{v} = \alpha(\beta\vec{v})$,
8. $1\,\vec{v} = \vec{v}$.

Příklady vektorových prostorů

- Významnou roli hraje následující vektorový prostor:

Příklad (Vektorový prostor $\mathbb{R}^n$)

Vektorový prostor $\mathbb{R}^n$ tvoří množina všech n-tic reálných čísel:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\},$$

s operacemi definovanými po složkách:

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n),$$

$$\lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n).$$

Další příklady vektorových prostorů:

- Prostory reálných polynomů $\mathcal{P}_k$ stupně nejvýše k.
- Prostory všech reálných matic daného rozměru, např. $\mathbb{R}^{m \times n}$.
- Prostory hladkých funkcí na intervalu, např. $C^1(\langle a, b\rangle)$.

$$\vdots$$

Vektorový podprostor

Definice (Vektorový podprostor)

Nechť V je vektorový prostor. Neprázdnou podmnožinu $U \subset V$ nazýváme vektorovým podprostorem prostoru V, jestliže pro všechna $\vec{u}, \vec{v} \in U$ a všechna $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ platí

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in U.$$

- Z definice plyne, že U obsahuje nulový vektor: pro libovolné $\vec{u}, \vec{v} \in U$ volbou $\alpha = \beta = 0$ dostaneme
$$0\vec{u} + 0\vec{v} = \vec{0} \in U.$$
- Uzavřenost na sčítání dostaneme volbou $\alpha = \beta = 1$:
$$\vec{u} + \vec{v} \in U.$$
- Uzavřenost na násobení skalárem plyne z volby $\alpha = \lambda$, $\beta = 0$:
$$\lambda\vec{u} \in U.$$
- Vektorový podprostor je tedy podmnožina vektorového prostoru, která je se stejnými operacemi sama opět vektorovým prostorem.

Příklad vektorového podprostoru v $\mathbb{R}^3$

Příklad (Rovina procházející počátkem)

Uvažujme množinu

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}.$$

- Nejprve ověříme, že $U \neq \varnothing$, protože nulový vektor splňuje $0 + 0 + 0 = 0$.
- Nechť $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in U$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; pak lineární kombinace patří do U:

$$\alpha(x_1, y_1, z_1) + \beta(x_2, y_2, z_2) = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2).$$

$$(\alpha x_1 + \beta x_2) + (\alpha y_1 + \beta y_2) + (\alpha z_1 + \beta z_2) = \alpha \underbrace{(x_1 + y_1 + z_1)}_{0} + \beta \underbrace{(x_2 + y_2 + z_2)}_{0} = 0.$$

- Množina U je tedy vektorovým podprostorem prostoru $\mathbb{R}^3$ – geometricky jde o rovinu procházející počátkem.

- Obecně platí, že množina všech řešení homogenní lineární soustavy rovnic

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$$

je vždy vektorovým podprostorem prostoru $\mathbb{R}^n$.

Báze a soustava souřadnic

- My budeme pracovat pouze s konečně dimenzionálními vektorovými prostory, neboli s prostory, které mají konečnou bázi.

Definice (Báze a dimenze)

Báze (konečně dimenzionálního) vektorového prostoru V je uspořádaná konečná množina vektorů

$$\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\},$$

která je lineárně nezávislá a generuje celý prostor V. Počet prvků báze nazýváme dimenzí prostoru V a značíme

$$\dim V = n.$$

Definice (Soustava souřadnic)

Nechť $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ je báze prostoru V. Každý vektor $\vec{v} \in V$ lze jednoznačně vyjádřit ve tvaru

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \vec{e}_i,$$

kde $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}$ jsou souřadnice vektoru vzhledem k bázi $\mathcal{B}$.

- Analogicky definujeme bázi, dimenzi a souřadnice i pro vektorové podprostory.

Přechod k souřadnicím v $\mathbb{R}^n$

Tvrzení (Identifikace s $\mathbb{R}^n$)

Každý vektorový prostor dimenze n je izomorfní s prostorem $\mathbb{R}^n$ pomocí přiřazení:

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \vec{e}_i \quad \longleftrightarrow \quad (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n.$$

- Izomorfismus je vzájemně jednoznačné lineární zobrazení (viz. později).
- Prvky prostoru $\mathbb{R}^n$ budeme zapisovat ve tvaru

$$\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Příklad (Kanonická báze)

Prostor $\mathbb{R}^n$ má kanonickou bázi

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \quad \ldots \quad \mathbf{e}_n = (0, 0, \ldots, 1).$$

- My budeme vždy pracovat s vektorovým prostorem $\mathbb{R}^n$ a používat kanonickou bázi.

Skalární součin v $\mathbb{R}^n$

- Uvažujeme $V = \mathbb{R}^n$, kde jsou souřadnice vektorů vyjádřeny vzhledem ke kanonické bázi.

Definice (Skalární součin)

Skalární součin dvou vektorů $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ je dán vzorcem:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i.$$

Definice (Velikost vektoru)

Velikost vektoru $\mathbf{u}$ je definována pomocí skalárního součinu:

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}.$$

- Vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ jsou kolmé, pokud $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.
- Úhel $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$ mezi nenulovými vektory určuje vzorec:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \cos \varphi.$$

Příklad: skalární součin, norma a úhel

Příklad (Skalární součin)

Uvažujme vektory

$$\mathbf{u} = (1, 2, 2), \qquad \mathbf{v} = (2, 0, 1).$$

- Skalární součin:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 4.$$

- Velikosti vektorů:

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3, \qquad \|\mathbf{v}\| = \sqrt{2^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{5}.$$

- Úhel mezi vektory:

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|} = \frac{4}{3\sqrt{5}}.$$

- Z toho plyne, že vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ nejsou kolmé ani rovnoběžné.

Ortonormální báze

Definice (Ortogonální báze podprostoru)

Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je vektorový podprostor dimenze k. Bázi

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_k\}$$

nazýváme ortogonální bází podprostoru U, jestliže pro všechna $i \neq j$ platí

$$\mathbf{d}_i \cdot \mathbf{d}_j = 0.$$

Definice (Ortonormální báze podprostoru)

Ortogonální bázi $\{\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_k\}$ nazýváme ortonormální, jestliže navíc pro všechna $i \in \{1, \dots, k\}$ platí

$$\|\mathbf{d}_i\| = 1, \qquad \text{ekvivalentně} \qquad \mathbf{d}_i \cdot \mathbf{d}_j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Tvrzení (Kanonická báze v $\mathbb{R}^n$)

Kanonická báze

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \quad \dots \quad \mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$$

prostoru $\mathbb{R}^n$ je ortonormální bází.

Ortonormalizační proces (Gram–Schmidt)

- Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je vektorový podprostor a $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ je jeho báze.
- Pomocí Gramova–Schmidtova procesu z této báze sestrojíme ortogonální bázi $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k\}$:

$$\mathbf{w}_1 := \mathbf{v}_1,$$

$$\mathbf{w}_i := \mathbf{v}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{w}_j}{\|\mathbf{w}_j\|^2}\, \mathbf{w}_j, \qquad i = 2, \dots, k.$$

- Z ortogonální báze pak získáme ortonormální bázi $\{\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_k\}$ podprostoru U normalizací:

$$\mathbf{d}_i := \frac{\mathbf{w}_i}{\|\mathbf{w}_i\|}, \qquad i = 1, \dots, k.$$

Příklad: Gramův–Schmidtův proces v $\mathbb{R}^3$

Příklad (Ortonormalizace báze)

Uvažujme podprostor $U \subset \mathbb{R}^3$ s bází

$$\mathbf{v}_1 = (1,1,0), \qquad \mathbf{v}_2 = (1,0,1).$$

- Nejprve položíme
$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 = (1,1,0),$$
- Dále spočítáme
$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|^2}\mathbf{w}_1 = (1,0,1) - \frac{1}{2}(1,1,0) = \left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, 1\right) \sim (1,-1,2) = \tilde{\mathbf{w}}_2.$$
- Máme tedy ortogonální bázi:
$$\mathbf{w}_1 = (1,1,0), \qquad \tilde{\mathbf{w}}_2 = (1,-1,2).$$
- Normalizací dostaneme ortonormální bázi:
$$\mathbf{d}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), \qquad \mathbf{d}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2).$$

Projekce vektoru

Tvrzení (Projekce a rozklad)

Nechť $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, kde $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Pak existuje právě jeden rozklad:

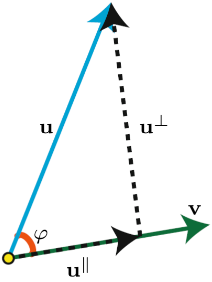
$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^{\|} + \mathbf{u}^{\perp},$$

kde $\mathbf{u}^{\|}$ je rovnoběžný s $\mathbf{v}$ a $\mathbf{u}^{\perp}$ je kolmý k $\mathbf{v}$. Vektor $\mathbf{u}^{\|}$ se nazývá projekce vektoru $\mathbf{u}$ ve směru $\mathbf{v}$ a platí:

$$\mathbf{u}^{\|} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v}.$$

Důkaz:

- Hledáme vektor tvaru $\mathbf{u}^{\|} = \lambda \mathbf{v}$, aby
$$\mathbf{u}^{\perp} = \mathbf{u} - \mathbf{u}^{\|} \perp \mathbf{v}.$$
- Podmínka kolmosti:
$$(\mathbf{u} - \lambda \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}.$$
- Dosazením do $\mathbf{u}^{\|} = \lambda \mathbf{v}$ dostaneme hledaný vztah.



□

Příklad: projekce vektoru v $\mathbb{R}^3$

Příklad (Projekce vektoru)

Uvažujme vektory

$$\mathbf{u} = (2, 1, 1), \qquad \mathbf{v} = (1, 1, 0).$$

- Nejprve spočítáme skalární součin a normu vektoru $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 3, \qquad \|\mathbf{v}\|^2 = 1^2 + 1^2 + 0^2 = 2.$$

- Projekce vektoru $\mathbf{u}$ do směru $\mathbf{v}$ je

$$\mathbf{u}^{\parallel} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2} \mathbf{v} = \frac{3}{2}(1, 1, 0) = \left(\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}, 0\right).$$

- Kolmá složka je

$$\mathbf{u}^{\perp} = \mathbf{u} - \mathbf{u}^{\parallel} = (2, 1, 1) - \left(\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}, 0\right) = \left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, 1\right).$$

- Ověření kolmosti:

$$\mathbf{u}^{\perp} \cdot \mathbf{v} = \tfrac{1}{2} \cdot 1 + \left(-\tfrac{1}{2}\right) \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0.$$

Projekce na vektorový podprostor

- Analogicky můžeme zavést projekci vektoru do vektorového podprostoru U.
- K tomu je výhodné mít podprostor U popsán ortogonální nebo ortonormální bází.
- Nechť $U \subset V$ je vektorový podprostor a $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k\}$ je jeho ortogonální báze. Pak projekce vektoru $\mathbf{u}$ na U je dána vztahem

$$\mathrm{proj}_U(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}_i}{\|\mathbf{w}_i\|^2} \mathbf{w}_i.$$

- Je-li $\{\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_k\}$ ortonormální báze podprostoru U, dostáváme zjednodušený tvar:

$$\mathrm{proj}_U(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{k} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{d}_i)\, \mathbf{d}_i.$$

Příklad: projekce na podprostor

Příklad (Projekce na podprostor)

Uvažujme podprostor

$$U = \operatorname{span}\{\, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \,\} \subset \mathbb{R}^3, \qquad \mathbf{w}_1 = (1,1,0),\ \mathbf{w}_2 = (1,-1,0),$$

a vektor

$$\mathbf{u} = (2,1,3).$$

- Vektory $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ jsou kolmé:
$$\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2 = 1 - 1 + 0 = 0,$$
tedy tvoří ortogonální bázi roviny U.
- Projekce $\mathbf{u}$ na U:
$$\operatorname{proj}_U(\mathbf{u}) = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|^2}\,\mathbf{w}_1 + \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|^2}\,\mathbf{w}_2.$$
- Dosazením:

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}_1 = 2+1+0 = 3, \qquad \mathbf{u}\cdot\mathbf{w}_2 = 2-1+0 = 1, \qquad \|\mathbf{w}_1\|^2 = \|\mathbf{w}_2\|^2 = 2.$$

$$\operatorname{proj}_U(\mathbf{u}) = \frac{3}{2}(1,1,0) + \frac{1}{2}(1,-1,0) = (2,1,0).$$

Vektorový součin v $\mathbb{R}^3$

Definice (Vektorový součin)

Nechť $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$. Vektorový součin je definován jako

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right).$$

- Pokud jsou vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ lineárně závislé, pak

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

- Pokud jsou vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ lineárně nezávislé, platí:
  1. $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ je ortogonální k oběma vektorům $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.
  2. $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \sin \varphi, \quad \varphi = \angle(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$
  3. Směr $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ určuje pravidlo pravé ruky.

Příklad: vektorový součin

Příklad (Vektorový součin)

Uvažujme vektory $\mathbf{u} = (1,0,1)$ a $\mathbf{v} = (0,1,1)$.

- Vektorový součin:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-1,-1,1).$$

- Ověření kolmosti:

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = (-1,-1,1) \cdot (1,0,1) = -1 + 0 + 1 = 0,$$
$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = (-1,-1,1) \cdot (0,1,1) = 0 - 1 + 1 = 0.$$

- Velikosti:

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{2}, \qquad \|\mathbf{v}\| = \sqrt{2}, \qquad \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \sqrt{3}.$$

- Úhel mezi $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$:

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

- Ověření vztahu:

$$\|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \sin\varphi = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|.$$

Lineární zobrazení

Definice (Lineární zobrazení)

Nechť V, W jsou vektorové prostory nad $\mathbb{R}$. Zobrazení $\varphi : V \to W$ nazýváme lineárním, jestliže pro všechny $\vec{u}, \vec{v} \in V$ a všechna $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ platí

$$\varphi(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha\varphi(\vec{u}) + \beta\varphi(\vec{v}).$$

Tvrzení (Maticový tvar v $\mathbb{R}^n$)

Nechť $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$ a $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je lineární. Pak existuje právě jedna matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ taková, že

$$\varphi(\mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{u} \qquad \text{pro všechna } \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n.$$

- Sloupce matice $\mathbf{A}$ tvoří obrazy bázových vektorů prostoru $\mathbb{R}^n$ při zobrazení do prostoru $\mathbb{R}^m$:

$$\mathbf{A} = \big(\varphi(\mathbf{e}_1) \ \cdots \ \varphi(\mathbf{e}_n)\big).$$

- Je-li $\varphi : V \to V$, pak zobrazení φ nazýváme lineární transformací prostoru V.
- V případě $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je matice $\mathbf{A}$ čtvercová typu $n \times n$.

Příklad lineární transformace

Příklad (Lineární transformace v $\mathbb{R}^2$)

Uvažujme zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dané předpisem

$$\varphi(x, y) = (2x + y,\ x - y).$$

- Matice zobrazení v kanonické bázi:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \varphi(\mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{u}.$$

- Sloupce matice $\mathbf{A}$ jsou obrazy bázových vektorů:

$$\varphi(\mathbf{e}_1) = (2, 1), \qquad \varphi(\mathbf{e}_2) = (1, -1).$$

- Například pro vektor

$$\mathbf{u} = (1, 2)$$

  dostaneme

$$\varphi(\mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix},$$

  tedy

$$\varphi(1, 2) = (4, -1).$$

Jádro a obraz lineárního zobrazení

Definice (Jádro a obraz zobrazení)

Nechť $\varphi : V \to W$ je lineární zobrazení.

- Jádro zobrazení φ je množina všech vektorů, které se zobrazí na nulový vektor:

$$\ker \varphi = \{\vec{v} \in V \mid \varphi(\vec{v}) = \vec{0}\}.$$

- Obraz zobrazení φ je množina všech hodnot, kterých zobrazení nabývá:

$$\operatorname{Im} \varphi = \{\varphi(\vec{v}) \in W \mid \vec{v} \in V\}.$$

- Množiny $\ker \varphi$ a $\operatorname{Im} \varphi$ jsou vektorové podprostory prostorů V a W.

Tvrzení (Maticový tvar v $\mathbb{R}^n$)

Nechť $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$ a lineární zobrazení je dáno vztahem $\varphi(\mathbf{u}) = \mathbf{Au}$. Pak platí:

$$\ker \varphi = \ker \mathbf{A} = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{Au} = \mathbf{0}\},$$

tj. vektorový podprostor tvořený všemi řešeními homogenní lineární soustavy $\mathbf{Au} = \mathbf{0}$, a dále

$$\operatorname{Im} \varphi = \operatorname{Im} \mathbf{A} = \operatorname{span}\{\text{sloupce matice } \mathbf{A}\},$$

tj. vektorový podprostor generovaný sloupcovými vektory matice $\mathbf{A}$.

Příklad: výpočet jádra lineárního zobrazení

Příklad (Jádro matice)

Uvažujme lineární zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dané maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \varphi(\mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{u}.$$

- Hledáme všechny vektory $\mathbf{u} = (x, y, z)$ splňující

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x + y = 0, \\ y + z = 0. \end{cases}$$

- Z rovnic dostaneme

$$x = -y, \qquad z = -y,$$

tedy

$$\mathbf{u} = \lambda(-1, 1, -1), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- Jádro zobrazení je tedy

$$\ker \varphi = \operatorname{span}\{(-1, 1, -1)\},$$

což je přímka procházející počátkem v $\mathbb{R}^3$.

Příklad: obraz lineárního zobrazení

Příklad (Obraz matice)

Uvažujme stejné lineární zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dané maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Obraz zobrazení je generován sloupci matice:

$$\operatorname{Im} \varphi = \operatorname{span}\{(1,0),(1,1),(0,1)\}.$$

- Třetí sloupec je lineární kombinací prvních dvou:

$$(0,1) = (1,1) - (1,0),$$

  takže postačí

$$\operatorname{Im} \varphi = \operatorname{span}\{(1,0),(1,1)\}.$$

- Tyto dva vektory jsou lineárně nezávislé, a proto

$$\operatorname{Im} \varphi = \mathbb{R}^2.$$

- Proto je zobrazení surjektivní (na).

Vlastní čísla a vlastní vektory lineární transformace

Definice (Vlastní číslo a vlastní vektor)

Nechť $\varphi : V \to V$ je lineární transformace reálného vektorového prostoru V. Řekneme, že číslo $\lambda \in \mathbb{R}$ je vlastním číslem transformace φ a nenulový vektor $\vec{v} \in V$ je vlastním vektorem příslušným k λ, jestliže platí

$$\varphi(\vec{v}) = \lambda\vec{v}.$$

- Pro $V = \mathbb{R}^n$ a $\varphi(\mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{u}$ dostáváme rovnici

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}.$$

Tvrzení (Charakteristická rovnice)

Nechť $V = \mathbb{R}^n$ a $\varphi(\mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{u}$, kde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Skalár $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastním číslem transformace φ právě tehdy, když platí

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0.$$

Tento polynom nazýváme charakteristický polynom matice $\mathbf{A}$.

- I když je transformace dána reálnou maticí, její vlastní čísla mohou být obecně komplexní; proto zde pracujeme v komplexním rozšíření prostoru (tzv. komplexifikaci).
- Pro pevné $\lambda \in \mathbb{C}$ tvoří množina všech řešení rovnice

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0} \qquad \leftrightarrow \qquad \ker(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$$

vektorový podprostor prostoru $\mathbb{C}^n$, který nazýváme vlastní podprostor k λ:

Příklad: vlastní čísla a vlastní vektory

Příklad (Vlastní čísla a vektory)

Uvažujme matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

- Vlastní čísla:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-3)^2 = 0. \quad \to \quad \lambda_1 = 1,\ \lambda_{2,3} = 3.$$

- Vlastní podprostory jako jádra matic $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$:
  - Pro $\lambda = 1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \to \quad \ker(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = \operatorname{span}\{(1,-1,0)$$

  - Pro $\lambda = 3$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \to \quad \ker(\mathbf{A} - 3\mathbf{I}) = \operatorname{span}\{(1,1,0),(0,0,1)\}.$$

Osnova

Afinní a eukleidovská geometrie

- V geometrii pracujeme především s body, nejen s vektory.
- Vektorový prostor zvýhodňuje počátek, který ale v geometrii nemá žádný speciální význam. Např. všechny vektorové podprostory prochází počátkem.
- Zavádíme tedy afinní prostor:
  - umožňuje pracovat současně s body a vektory,
  - nemá žádný preferovaný bod – neexistuje zde přirozený počátek,
  - díky vektorovému zaměření lze používat nástroje lineární algebry.
- Afinní geometrie popisuje:
  - body, přímky, roviny apod.,
  - rovnoběžnost,
  - barycentrické kombinace bodů,

  ale neumožňuje měřit délky ani úhly.
- Pro měření zavádíme eukleidovský prostor – afinní prostor se skalárním součinem.
- V eukleidovské geometrii můžeme pracovat s:
  - vzdálenostmi,
  - úhly a kolmostí,
  - délkami, obsahy a objemy.

Afinní prostor

Definice (Afinní prostor)

Afinní prostor je trojice $(\mathbb{A}, V, \oplus)$, kde:

- $\mathbb{A}$ je množina bodů (tzv. nositelka),
- V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{R}$ (tzv. vektorové zaměření),
- $\oplus : \mathbb{A} \times V \to \mathbb{A}$ je zobrazení (tzv. translace),

které splňuje:

1. $X \oplus \vec{0} = X$ pro všechna $X \in \mathbb{A}$,
2. $X \oplus (\vec{u} + \vec{v}) = (X \oplus \vec{u}) \oplus \vec{v}$,
3. pro každé $X, Y \in \mathbb{A}$ existuje právě jeden $\vec{u} \in V$ tak, že $X \oplus \vec{u} = Y$.

- Afinní prostor umožňuje pracovat současně s body a vektory.
- Vlastní geometrické konstrukce se odehrávají v nositelce (bodové množině) $\mathbb{A}$.
- Díky přítomnosti vektorového zaměření V můžeme v afinní geometrii používat nástroje lineární algebry.

Soustava souřadnic

Definice (Souřadnicový repér)

Nechť $O \in \mathbb{A}_n$ a $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ je báze vektorového zaměření V. Uspořádanou $(n+1)$-tici

$$\mathcal{R} = \{O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$$

nazýváme repérem.

Definice (Soustava souřadnic)

Repér $\mathcal{R}$ určuje zobrazení

$$\mathcal{S} : \mathbb{A}_n \to \mathbb{R}^n, \qquad X = O \oplus \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i \longmapsto [x_1, \dots, x_n],$$

které nazýváme soustavou souřadnic.

- Bod O se nazývá počátek soustavy souřadnic.

Model afinního prostoru v $\mathbb{R}^n$

Příklad (Afinní prostor $\mathbb{R}^n$)

- Po zavedení soustavy souřadnic pracujeme s n-rozměrným afinním prostorem nad $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{A}_n = \mathbb{R}^n, \quad V_n = \mathbb{R}^n.$$

- Translace je dána předpisem

$$[x_1, \ldots, x_n] \oplus (u_1, \ldots, u_n) = [x_1 + u_1, \ldots, x_n + u_n].$$

- Vyskytují se zde dvě různé kopie $\mathbb{R}^n$:
  - jako množina bodů $\mathbb{A} = \mathbb{R}^n$,
  - jako vektorový prostor $V = \mathbb{R}^n$.
- Pro rozlišení zapisujeme:
  - body hranatými závorkami $\mathbf{x} = [x_1, \ldots, x_n]$,
  - vektory kulatými závorkami $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$.
- Dva body $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ potom jednoznačně určují vektor $\mathbf{u} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$.

Afinní podprostor

Definice (Afinní podprostor)

Nechť $(\mathbb{A}, V, \oplus)$ je afinní prostor, $X \in \mathbb{A}$ a $U \subset V$ je vektorový podprostor. Množinu

$$X \oplus U = \{ X \oplus \mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in U \}$$

nazýváme afinním podprostorem.

- Každý afinní podprostor v $\mathbb{R}^n$ lze popsat jako množinu řešení nehomogenní lineární soustavy
$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$
- Na rozdíl od vektorového podprostoru afinní podprostor obecně neprochází počátkem.

Eukleidovský prostor

Definice (Eukleidovský prostor)

Eukleidovským prostorem $\mathbb{E}$ rozumíme afinní prostor, v jehož vektorovém zaměření je definován skalární součin.

- V dalším budeme vždy pracovat s modelem

$$(\mathbb{E}, V, \oplus) = (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n, +),$$

a se standardním skalárním součinem na $\mathbb{R}^n$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i.$$

- Díky skalárnímu součinu můžeme v eukleidovském prostoru přirozeně pracovat se vzdálenostmi a úhly

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}, \qquad \cos \angle(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|}.$$

Afinní zobrazení

Definice (Afinní zobrazení)

Nechť $(\mathbb{A}_n, V, \oplus)$ a $(\mathbb{A}_m, W, \oplus')$ jsou afinní prostory. Zobrazení $f : \mathbb{A}_n \to \mathbb{A}_m$ nazýváme afinním, jestliže existuje lineární zobrazení $\varphi : V \to W$ takové, že pro všechny $X \in \mathbb{A}_n$ a $\vec{u} \in V$ platí

$$f(X \oplus \vec{u}) = f(X) \oplus' \varphi(\vec{u}).$$

Tvrzení (Maticový tvar afinního zobrazení)

Je-li $\mathbb{A}_n = \mathbb{R}^n$ a $\mathbb{A}_m = \mathbb{R}^m$ a $\varphi(\mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{u}$, kde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, pak má afinní zobrazení tvar

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b},$$

kde $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

- Afinní zobrazení zachovává:
  - incidenci,
  - rovnoběžnost,
  - dělící poměr bodů na přímce,
  - barycentrické kombinace.
- Ale na rozdíl od lineárního zobrazení nezobrazuje počátek na počátek.

Příklad afinní transformace

Příklad (Lineární část a posunutí)

Uvažujme afinní transformaci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ danou vztahem

$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- Zobrazení se skládá z lineární transformace

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  a následného posunutí o vektor

$$\mathbf{b} = (1, -1).$$

- Například pro bod

$$\mathbf{x} = [2, 3]$$

  dostaneme

$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

- Tato afinní transformace obecně nezachovává délky ani úhly.

Shodnosti

Definice (Shodnost – afinní izometrie)

Nechť $\mathbb{E}_n$ a $\mathbb{E}_m$ jsou eukleidovské prostory. Afinní zobrazení $f : \mathbb{E}_n \to \mathbb{E}_m$ nazýváme shodností (afinní izometrií), jestliže pro všechny body $X, Y \in \mathbb{E}_n$ platí

$$\|f(X) - f(Y)\| = \|X - Y\|.$$

- Z podmínky zachování vzdáleností plyne, že nutně $n = m$.

Tvrzení (Tvar shodnosti v $\mathbb{R}^n$)

Je-li $\mathbb{E}_n = \mathbb{R}^n$, pak zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je shodnost právě tehdy, když má tvar

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{b},$$

kde $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je ortogonální matice a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.

- Shodnost zachovává:
  - délky,
  - úhly,
  - obsahy a objemy.

Typy shodností v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$

Shodnosti v $\mathbb{R}^2$:

- Identita.
- Posunutí o vektor $\mathbf{b}$.
- Rotace o úhel θ kolem bodu P.
- Zrcadlení podle přímky p.
- Klouzavá symetrie: zrcadlení podle přímky p a posunutí ve směru p.

Shodnosti v $\mathbb{R}^3$:

- Identita.
- Posunutí o vektor $\mathbf{b}$.
- Rotace o úhel θ kolem osy ℓ.
- Zrcadlení podle roviny π.
- Šroubový pohyb: rotace kolem osy ℓ spojená s posunutím ve směru osy ℓ.
- Klouzavé zrcadlení: zrcadlení podle roviny π spojené s posunutím v rovině π.
- Otočně-zrcadlová symetrie (roto-reflexe): rotace kolem osy ℓ a následné zrcadlení podle roviny kolmé k ose ℓ.