FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD
ZÁPADOČESKÉ UNIVERZITY
V PLZNI

KATEDRA MATEMATIKY

KMA/GKP GEOMETRIE KŘIVEK A PLOCH

Diferenciální geometrie křivek

Diferenciální geometrie – úvod

O čem je diferenciální geometrie

- Diferenciální geometrie studuje křivky a plochy jako hladké objekty v prostoru.
- Pomocí aparátu diferenciálního počtu a lineární algebry studuje jejich lokální i globální geometrii.
- Po celou dobu budeme pracovat v eukleidovském prostoru
$$\mathbb{E}_n = (\mathbb{R}^n,\ \mathbb{R}^n,\ +)$$
se standardním skalárním součinem.

Proč je důležitá

- Učí nás, jak měřit tvar: délky, úhly, obsahy a křivosti.
- Rozlišuje vnitřní vlastnosti (měřitelné přímo „po povrchu“: délky, úhly, obsah) od vnějších (popisují, jak je plocha ohnutá v prostoru).
- Je přirozeným jazykem např. pro geometrické modelování, počítačovou grafiku, fyziku a robotiku.

Hlavní témata

- U křivek zavedeme tečnu, normálu, křivost a v prostoru také torzi (Frenetův repér).
- U ploch zavedeme tečnou rovinu a normálu, první a druhou fundamentální formu a normálovou křivost.
- Z normálové křivosti odvodíme hlavní křivosti, Gaussovu a střední křivost a základní typy bodů plochy.

Osnova

Parametrizovaná křivka

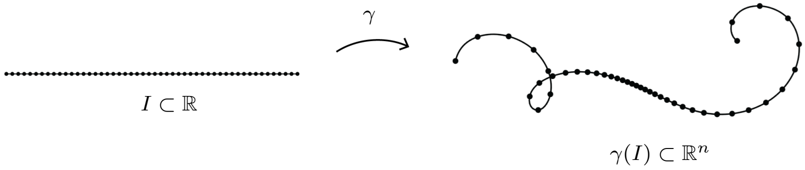
Definice (Parametrizovaná křivka)

Parametrizovaná (parametrická) křivka v $\mathbb{R}^n$ je hladká funkce $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$, kde $I \subset \mathbb{R}$ je interval.

- Intervalem rozumíme neprázdnou souvislou podmnožinu množiny $\mathbb{R}$. Každý interval má jeden z následujících tvarů:

$$(a,b),\ \langle a,b\rangle,\ (a,b\rangle,\ \langle a,b),\ (-\infty,b),\ (-\infty,b\rangle,\ (a,\infty),\ \langle a,\infty),\ (-\infty,\infty).$$

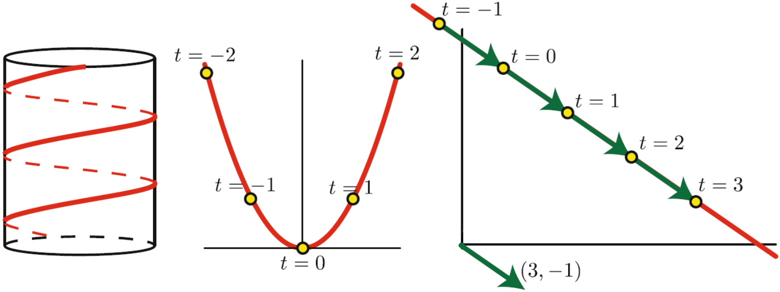
- Parametrizovaná křivka je tedy konkrétní způsob, jak projít body křivky – včetně informace o směru, rychlosti, zrychlení, atd.



Příklady parametrizací křivek

Příklad (Příklady parametrizací)

Příklady konkrétních parametrických křivek: šroubovice, parabola, přímka.



$\gamma(t) = [\cos t, \sin t, t]$

$\gamma(t) = [t, t^2]$

$\gamma(t) = [2, 4] + t(3, -1)$

Derivace křivky

Definice (Derivace křivky)

Je-li $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ parametrická křivka se složkami

$$\gamma(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)],$$

pak její derivace $\gamma'\colon I \to \mathbb{R}^n$ je definovaná předpisem

$$\gamma'(t) = (x_1'(t), x_2'(t), \dots, x_n'(t)).$$

Derivace vyšších řádů se definují analogicky.

- Parametrickou křivku tedy derivujeme po jednotlivých složkách.
- Například prostorová křivka $\gamma(t) = [x(t), y(t), z(t)]$ má první derivaci

  $$\gamma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)),$$

  druhou derivaci

  $$\gamma''(t) = (x''(t), y''(t), z''(t)),$$

  a tak dále.

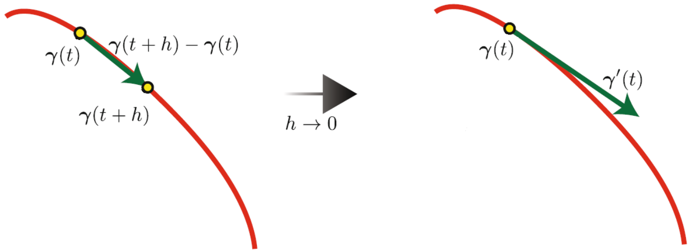
Geometrický význam derivace křivky

Tvrzení (Geometrický význam derivace)

Derivace parametrické křivky $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ v čase $t \in I$ je dána vztahem

$$\gamma'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}.$$

Důkaz: Plyne přímo z definice derivace a z toho, že derivujeme po složkách. $\square$



Hladkost křivek

Definice (Křivka třídy C^k)

Parametrizovaná křivka

$$\gamma : I \to \mathbb{R}^n$$

je třídy C^k, jestliže všechny její složky mají spojité derivace až do řádu k včetně.

- Geometrické konstrukce pracují s derivacemi křivky různých řádů.
- Konkrétně například:
  - pro definici tečny stačí křivka třídy C^1,
  - pro definici křivosti je nutná křivka třídy alespoň C^2,
  - pro definici torze potřebujeme křivku třídy alespoň C^3.
- Abychom se nemuseli na každém místě zabývat technickými detaily, nebudeme u jednotlivých pojmů výslovně uvádět požadovanou třídu hladkosti.
- V celém kurzu budeme automaticky předpokládat, že křivky mají tolik spojitých derivací, kolik je pro danou konstrukci potřeba.
- Běžné funkce používané v matematice a aplikacích (polynomy, goniometrické funkce, exponenciální funkce apod.) tyto podmínky hladkosti automaticky splňují.

Křivka

Definice (Křivka jako stopa parametrizace)

Křivka (stopa parametrizace) je množina obrazů zobrazení γ, tedy:

$$C = \gamma(I) = \{\gamma(t) \in \mathbb{R}^n \mid t \in I\}.$$

- Tato množina nezachovává informaci o směru ani rychlosti průchodu – jde pouze o geometrický tvar.
- Pokud nehrozí nedorozumění, budeme dále výrazem křivka označovat i samotné zobrazení γ (tedy parametrizovanou křivku).

Příklad (Různé parametrizace téže křivky)

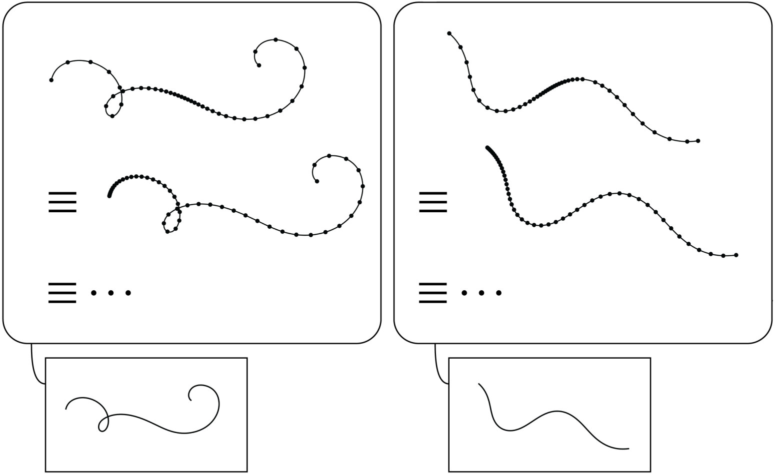
Parametrizace

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= [\cos t, \sin t], & t &\in \langle 0, 2\pi), \\ \gamma_2(s) &= [\cos(2s), \sin(2s)], & s &\in \langle 0, \pi), \end{aligned}$$

mají stejný obraz (jednotkovou kružnici v rovině $\mathbb{R}^2$), ale popisují různé parametrizované křivky (jiný průběh a rychlost).

Parametrizace vs. křivka

- Funkce γ nepopisuje pouze trajektorii bodu, ale také obsahuje informace o jeho kinematice, například o rychlosti a zrychlení.



Reparametrizace

Definice (Reparametrizace křivky)

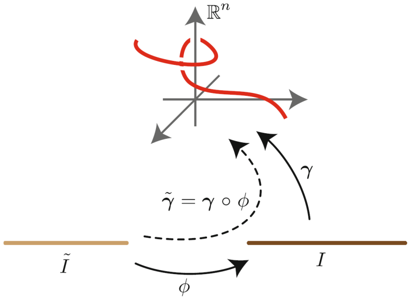
Nechť $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ je parametrizovaná křivka. Reparametrizací křivky γ nazveme složenou křivku

$$\tilde{\gamma}(t) = \gamma(\phi(t)),$$

kde $\phi : \tilde{I} \to I$ je hladké (třídy C^1) zobrazení mezi otevřenými intervaly, které splňuje:

- ϕ je bijekce,
- $\phi'(t) \neq 0$ pro všechna $t \in \tilde{I}$.

- Pracujeme-li s uzavřenými intervaly, rozumíme tím omezení na jejich vnitřky.



Reparametrizace

Příklad (Příklad reparametrizace)

Uvažujme dvě regulární rovinné křivky:

$$\gamma(t) = \left[t, t^2\right], \quad t \in \langle -2, 2 \rangle,$$

$$\tilde{\gamma}(t) = \left[2t, (2t)^2\right], \quad t \in \langle -1, 1 \rangle.$$

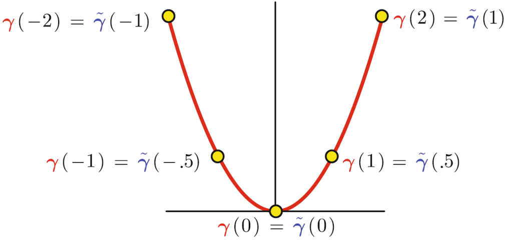
Obě mají stejnou stopu – část paraboly. Definujme zobrazení

$$\phi : \langle -1, 1 \rangle \to \langle -2, 2 \rangle, \quad \phi(t) = 2t.$$

Pak platí:

$$\tilde{\gamma}(t) = \gamma(\phi(t)) = (\gamma \circ \phi)(t).$$

Křivka $\tilde{\gamma}$ je tedy reparametrizací křivky γ.



Regulární křivka

Definice (Rychlost a regulárnost křivky)

Nechť $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ je parametrizovaná křivka, kde $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval. Okamžitá rychlost v čase $t \in I$ je dána velikostí derivace vektorové funkce:

$$v(t) = \|\gamma'(t)\|.$$

Křivka je regulární, pokud má v každém bodě nenulovou rychlost:

$$\|\gamma'(t)\| \neq 0 \quad \text{pro všechna } t \in I.$$

Příklad (Příklad neregulární křivky)

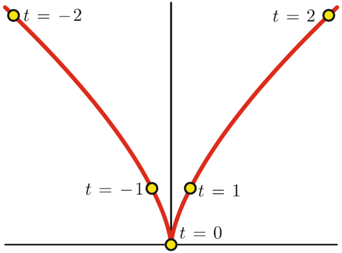
Uvažujme křivku

$$\gamma(t) = \left[t^3, t^2\right], \quad t \in \mathbb{R}.$$

Křivka má bod vratu v počátku, protože

$$\|\gamma'(0)\| = 0,$$

a tedy γ není regulární v bodě $t = 0$.



Uzavřená a jednoduchá křivka

Definice (Uzavřená křivka)

Uzavřenou křivkou rozumíme regulární křivku $\gamma : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^n$, která splňuje

$$\gamma(a) = \gamma(b).$$

- V některých situacích navíc požadujeme, aby se shodovaly i všechny derivace na koncích intervalu, tj. $\gamma'(a) = \gamma'(b)$, $\gamma''(a) = \gamma''(b)$, $\ldots$ potom mluvíme o hladce uzavřené (resp. periodické) křivce.

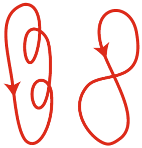
Definice (Jednoduchá křivka)

Křivku $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ nazveme jednoduchou, jestliže platí

$$\gamma(t_1) = \gamma(t_2) \;\Rightarrow\; t_1 = t_2 \quad \text{pro všechna } t_1, t_2 \in I.$$

- Je-li jednoduchá křivka uzavřená, připouštíme $\gamma(a) = \gamma(b)$.

uzavřená jednoduchá



nejsou jednoduché

Délka křivky

Definice (Délka oblouku křivky)

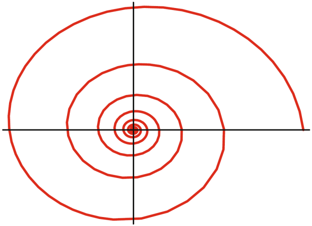
Délka oblouku křivky mezi časy t_1 a t_2, kde $t_1, t_2 \in I$, se vypočte jako integrál rychlosti:

$$s(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \|\gamma'(t)\| \, dt.$$

Příklad (Logaritmická spirála)

$$\gamma(t) = c\big[e^{\lambda t}\cos t,\ e^{\lambda t}\sin t\big], \quad t \in \mathbb{R},\ c, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Ukažte, že pro $\lambda < 0$ má křivka γ na intervalu $\langle 0, \infty)$ konečnou délku, přestože spirála nekonečněkrát obtočí počátek.



Délka křivky

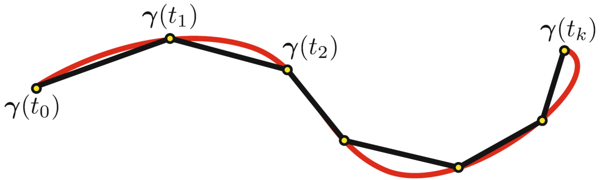
Tvrzení (Aproximace délky lomenou čarou)

Nechť $\gamma : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^n$ je regulární křivka. Délka oblouku je dána jako limita součtu délek lomené čáry:

$$\lim_{\delta\to 0} \sum_{i=0}^{k-1} \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\| = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt,$$

kde $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ je dělení intervalu a $\delta = \max_{0\le i<k}(t_{i+1} - t_i)$ je jeho jemnost.

Důkaz: Součet délek lomené čáry v limitě $\delta \to 0$ přechází v Riemannův integrál délky oblouku. $\square$



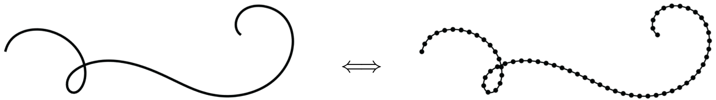
Parametrizace obloukem

Definice (Parametrizace obloukem)

Křivka je parametrizovaná obloukem, pokud má jednotkovou rychlost, tj. právě tehdy, když platí:

$$\|\gamma'(t)\| = 1 \quad \text{pro všechna } t \in I.$$

- Parametrizace obloukem je zvláště výhodná pro výpočty a důkazy.
- Každou regulární křivku lze teoreticky vždy takto reparametrizovat, i když v praxi to často vede na integrály, které nelze vyjádřit elementárními funkcemi.



Parametrizace obloukem

Tvrzení (Existence parametrizace obloukem)

Každou regulární křivku lze reparametrizovat obloukem.

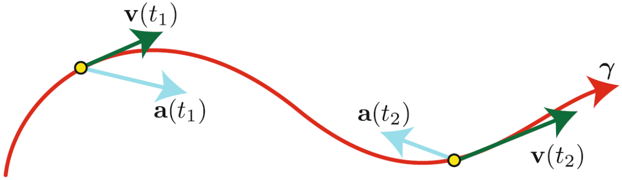
Důkaz:

- Protože je křivka regulární, platí $\|\gamma'(t)\| > 0$ pro všechna $t \in I$.
- Zvolíme pevné $t_0 \in I$ a definujeme délkovou funkci
$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\gamma'(u)\| \, du.$$
- Funkce $s(t)$ je hladká a ostře rostoucí ($s'(t) = \|\gamma'(t)\| > 0$). Proto má inverzní funkci $t = \phi(s)$.
- Definujeme novou parametrizaci
$$\tilde{\gamma}(s) = \gamma(\phi(s)).$$
- Použijeme pravidlo pro derivaci složené funkce:
$$\tilde{\gamma}'(s) = \gamma'(\phi(s))\, \phi'(s).$$
- Z identity $s \circ \phi = \mathrm{id}$, tj. $s(\phi(s)) = s$, po derivaci dostáváme
$$s'(\phi(s))\, \phi'(s) = 1 \quad \Rightarrow \quad \phi'(s) = \frac{1}{s'(\phi(s))} = \frac{1}{\|\gamma'(\phi(s))\|}.$$
- Odtud
$$\|\tilde{\gamma}'(s)\| = \|\gamma'(\phi(s))\|\, |\phi'(s)| = \|\gamma'(\phi(s))\| \, \frac{1}{\|\gamma'(\phi(s))\|} = 1.$$

□

Vektor rychlosti a zrychlení

- Nechť $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ je regulární křivka. Dále budeme používat následující notaci převzatou z fyziky:
    - vektor rychlosti: $\mathbf{v}(t) = \gamma'(t)$
    - vektor zrychlení: $\mathbf{a}(t) = \gamma''(t)$
- Vektor rychlosti $\mathbf{v}(t)$ obsahuje informaci o:
    - směru pohybu – je tečný ke křivce,
    - rychlosti pohybu – jeho velikost $v(t) = \|\mathbf{v}(t)\|$ udává okamžitou rychlost.

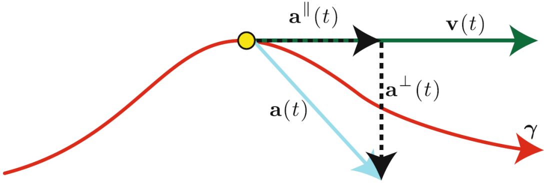


Zrychlení jako „síla“ ovlivňující pohyb

- Zrychlení $\mathbf{a}(t) = \gamma''(t)$ si můžeme představit jako vektor síly, který „tahá“ objekt tak, aby sledoval danou trajektorii.
- Jinými slovy, vektor $\mathbf{a}(t)$ určuje, jak se mění rychlost $\mathbf{v}(t)$ – tedy jak se mění směr nebo velikost pohybu v čase.
- Je přirozené rozdělit zrychlení $\mathbf{a}(t)$ na dvě složky:

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}^{\parallel}(t) + \mathbf{a}^{\perp}(t).$$

  - $\mathbf{a}^{\parallel}(t)$ je složka ve směru rychlosti $\mathbf{v}(t)$ – tedy tečná složka,
  - $\mathbf{a}^{\perp}(t)$ je složka kolmá na $\mathbf{v}(t)$ – tedy normálová složka.



Křivost křivky

Zavedeme křivost regulární křivky jako funkci

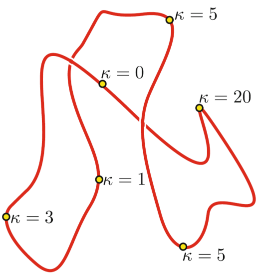
$$\kappa : I \to \langle 0, \infty),$$

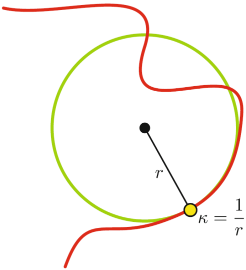
která v každém bodě $t \in I$ vyjadřuje, jak ostře se křivka γ v bodě $\gamma(t)$ zakřivuje.

- Hodnota $\kappa(t)$ je tím větší, čím výrazněji se trajektorie zakřivuje.
- Pokud křivka vypadá v okolí bodu jako přímka, pak $\kappa(t) = 0$.
- Pro kalibraci použijeme kružnici v rovině: Pokud se křivka v bodě $\gamma(t)$ stáčí stejně jako kružnice o poloměru r, pak platí:

  $$\kappa(t) = \frac{1}{r}.$$

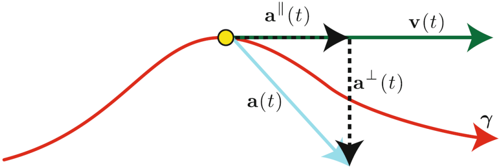
  Čím menší kružnice, tím větší křivost.





Křivost křivky

- Jak můžeme spočítat křivost?
- Vektor zrychlení $\mathbf{a}(t)$ popisuje, jak se mění rychlost.
- Jeho normálová složka $\mathbf{a}^{\perp}(t)$ vyjadřuje jak silně se křivka v daném bodě ohýbá.



- Velikost $\|\mathbf{a}^{\perp}(t)\|$ však závisí na parametrizaci (rychlosti).

Definice (Definice křivosti)

Nechť $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ je regulární křivka. Její křivost je definována vztahem

$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{a}^{\perp}(t)\|}{\|\mathbf{v}(t)\|^2}.$$

Křivost křivky

Tvrzení (Nezávislost křivosti na parametrizaci)

Křivost je nezávislá na parametrizaci.

Důkaz:

- Nechť $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(\phi(t))$ je reparametrizace regulární křivky γ.
- Označme:
$$\mathbf{v}(t) = \gamma'(t), \quad \mathbf{a}(t) = \gamma''(t), \quad \tilde{\mathbf{v}}(t) = \tilde{\gamma}'(t), \quad \tilde{\mathbf{a}}(t) = \tilde{\gamma}''(t).$$
- Potom
$$\begin{array}{rcccl} \tilde{\mathbf{v}}(t) & = & \mathbf{v}(\phi(t))\,\phi'(t) & & \\ \tilde{\mathbf{a}}(t) & = & \mathbf{v}(\phi(t))\,\phi''(t) & + & \mathbf{a}(\phi(t))\,\phi'(t)^2 \\ \tilde{\mathbf{a}}^\perp(t) & = & \mathbf{0} & + & \mathbf{a}^\perp(\phi(t))\,\phi'(t)^2. \end{array}$$
- A tedy
$$\tilde{\kappa}(t) = \frac{\|\tilde{\mathbf{a}}^\perp(t)\|}{\|\tilde{\mathbf{v}}(t)\|^2} = \frac{\|\mathbf{a}^\perp(\phi(t))\|\,\phi'(t)^2}{\|\mathbf{v}(\phi(t))\|^2\,\phi'(t)^2} = \frac{\|\mathbf{a}^\perp(\phi(t))\|}{\|\mathbf{v}(\phi(t))\|^2} = \kappa(\phi(t)).$$

□

Křivost křivky

Tvrzení (Křivost pro parametrizaci obloukem)

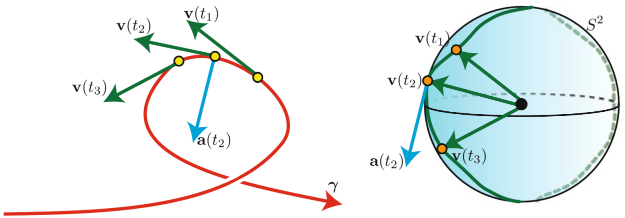
Je-li γ parametrizována obloukem, pak platí:

$$\kappa(t) = \|\mathbf{a}(t)\|.$$

Důkaz:

- Pro parametrizaci obloukem ($\|\mathbf{v}(t)\| = 1$) jsou $\mathbf{v}(t)$ a $\mathbf{a}(t)$ navzájem kolmé, platí tedy:
$$\mathbf{a}^{\perp}(t) = \mathbf{a}(t).$$
- Proto se výraz pro křivost zjednoduší:
$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{a}^{\perp}(t)\|}{\|\mathbf{v}(t)\|^2} = \frac{\|\mathbf{a}(t)\|}{1} = \|\mathbf{a}(t)\|.$$

$\square$



Křivost kružnice

Příklad (Křivost kružnice)

- Uvažujme kružnici parametrizovanou

$$\gamma(t) = [r\cos t,\ r\sin t], \quad t \in \langle 0, 2\pi).$$

- Rychlost a zrychlení:

$$\mathbf{v}(t) = \gamma'(t) = (-r\sin t,\ r\cos t), \qquad \mathbf{a}(t) = \gamma''(t) = (-r\cos t,\ -r\sin t).$$

- Všimněme si, že $\mathbf{a}(t) = -\gamma(t)$: zrychlení směřuje do středu, což odpovídá fyzikální intuici – pohyb po kružnici vyžaduje sílu mířící ke středu.
- Navíc platí $\mathbf{a}(t) \perp \mathbf{v}(t)$, tedy

$$\mathbf{a}^{\perp}(t) = \mathbf{a}(t).$$

- Křivost:

$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{a}^{\perp}(t)\|}{\|\mathbf{v}(t)\|^2} = \frac{\|\mathbf{a}(t)\|}{\|\mathbf{v}(t)\|^2} = \frac{r}{r^2} = \frac{1}{r}.$$

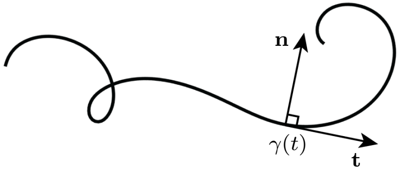
- Závěr: Kružnice poloměru r má konstantní křivost $\kappa = \frac{1}{r}$, což souhlasí s předchozí kalibrací křivosti.

Tečný a normálový vektor

Definice (Tečný a normálový vektor)

Nechť $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ je regulární křivka a $t \in I$ takové, že $\|\mathbf{a}^{\perp}(t)\| \neq 0$. Jednotkový tečný a jednotkový normálový vektor jsou definovány jako

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{v}(t)}{\|\mathbf{v}(t)\|}, \qquad \mathbf{n}(t) = \frac{\mathbf{a}^{\perp}(t)}{\|\mathbf{a}^{\perp}(t)\|}.$$



- Tečna ke křivce γ v bodě $\gamma(t_0)$ je přímka $\ell_{t_0} = \left\{\gamma(t_0) + \lambda\,\mathbf{t}(t_0) \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

Alternativní vyjádření křivosti

Tvrzení (Vyjádření křivosti pomocí tečného vektoru)

Nechť $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ je regulární křivka. Pak pro všechna $t \in I$ platí:

$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{t}'(t)\|}{\|\mathbf{v}(t)\|}.$$

Důkaz:

- Víme, že
$$\mathbf{t}'(t) \perp \mathbf{t}(t).$$
- Derivací součinu dostáváme:
$$\mathbf{v}'(t) = \mathbf{a}(t) = (\|\mathbf{v}(t)\|\,\mathbf{t}(t))' = \underbrace{\|\mathbf{v}(t)\|'\,\mathbf{t}(t)}_{\mathbf{a}^{\parallel}(t)} + \underbrace{\|\mathbf{v}(t)\|\,\mathbf{t}'(t)}_{\mathbf{a}^{\perp}(t)}.$$
- Z toho plyne:
$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{a}^{\perp}(t)\|}{\|\mathbf{v}(t)\|^2} = \frac{\|\mathbf{v}(t)\|\,\|\mathbf{t}'(t)\|}{\|\mathbf{v}(t)\|^2} = \frac{\|\mathbf{t}'(t)\|}{\|\mathbf{v}(t)\|}.$$

$\square$

- Křivost tedy odpovídá rychlosti změny tečného směru dělené rychlostí pohybu po křivce, což zajišťuje nezávislost na parametrizaci.

Alternativní vyjádření normálového vektoru

- Z důkazu předchozího tvrzení víme, že

$$\mathbf{a}^{\perp} = \|\mathbf{v}\|\,\mathbf{t}'.$$

- Vektory $\mathbf{a}^{\perp}$ a $\mathbf{t}'$ míří stejným směrem a určují jednotkovou normálu.

Tvrzení (Vyjádření normálového vektoru)

Nechť $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ je regulární křivka. Pak pro všechna $t \in I$ platí:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{a}^{\perp}}{\|\mathbf{a}^{\perp}\|} = \frac{\mathbf{t}'}{\|\mathbf{t}'\|}.$$

Alternativní vyjádření křivosti (viz normálová křivost ploch)

- Platí:
$$\kappa = \frac{\|\mathbf{t}'\|}{\|\mathbf{v}\|}, \qquad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{t}'}{\|\mathbf{t}'\|}.$$
- Odtud
$$\mathbf{t}' = \|\mathbf{t}'\|\,\mathbf{n} = \kappa\,\|\mathbf{v}\|\,\mathbf{n}.$$
- Skalárním vynásobením obou stran vektorem $\mathbf{n}$ dostaneme:
$$\mathbf{t}'\cdot\mathbf{n} = \kappa\,\|\mathbf{v}\|\,\underbrace{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}_{1} = \kappa\,\|\mathbf{v}\|.$$
- Z derivace identity $\mathbf{t}\cdot\mathbf{n} = 0$ plyne
$$\mathbf{t}'\cdot\mathbf{n} = -\mathbf{n}'\cdot\mathbf{t},$$
  a tedy:

Tvrzení (Další vyjádření křivosti)

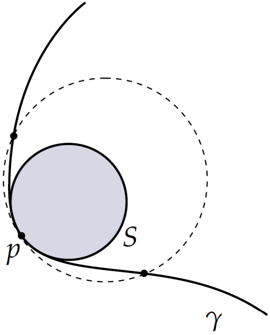
Nechť $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ je regulární křivka. Pak pro všechna $t \in I$ platí:
$$\kappa(t) = -\frac{\mathbf{n}'(t)\cdot\mathbf{t}(t)}{\|\mathbf{v}(t)\|}.$$

Oskulační kružnice

- Existuje právě jedna kružnice, která prochází třemi (nekolineárními) body $\gamma(t_0 - h)$, $\gamma(t_0)$, $\gamma(t_0 + h)$.
- Pro $h \to 0$ tato kružnice konverguje k tzv. oskulační kružnici v bodě $\gamma(t_0)$.

Definice (Oskuláční kružnice)

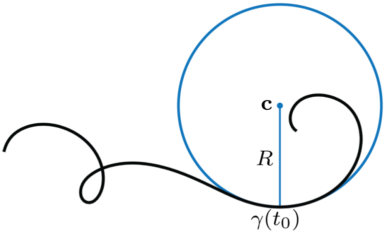
Oskuláční kružnice je jediná kružnice, která má v bodě $\gamma(t_0)$ stejný směr tečny a stejnou křivost jako křivka γ.



Oskuláční kružnice

- Oskuláční kružnice má následující střed a poloměr (v bodech, kde $\kappa(t_0) \neq 0$):

$$\mathbf{c} = \gamma(t_0) + R\,\mathbf{n}(t_0), \qquad R = \frac{1}{\kappa(t_0)}.$$



- Je-li $\kappa(t_0) = 0$, pak oskulační kružnice degeneruje na tečnu v bodě $\gamma(t_0)$.
- Pro $\kappa(t_0) \neq 0$ leží oskuláční kružnice v oskuláční rovině.

Definice (Oskuláční rovina)

Nechť $\kappa(t_0) \neq 0$. Rovina určená vektory $\mathbf{t}(t_0)$ a $\mathbf{n}(t_0)$ se nazývá oskuláční rovina v čase t_0:

$$\text{oskuláční rovina} = \operatorname{span}\{\mathbf{t}(t_0), \mathbf{n}(t_0)\} = \operatorname{span}\{\mathbf{v}(t_0), \mathbf{a}(t_0)\}.$$

Osnova

Znaménková křivost

- V rovině $\mathbb{R}^2$ lze přirozeně rozlišovat směr otáčení: po a proti směru hodinových ručiček.
- Zavedeme zobrazení $R_{90}(x, y) = (-y, x)$, které otáčí vektor o $90°$ proti směru hodinových ručiček.
- Pro křivku $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ parametrizovanou obloukem platí, že vektor $\mathbf{a}(t)$ je rovnoběžný s vektorem $R_{90}(\mathbf{v}(t))$.

Definice (Znaménková křivost)

Nechť $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ je rovinná křivka parametrizovaná obloukem. Potom existuje funkce $\kappa_s : I \to \mathbb{R}$, tzv. znaménková křivost, taková že

$$\mathbf{a}(t) = \kappa_s(t)\, R_{90}(\mathbf{v}(t)).$$

Znaménková křivost – výpočet

Tvrzení (Vzorec pro znaménkovou křivost)

Nechť $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ je regulární rovinná křivka (ne nutně parametrizovaná obloukem). Pak

$$\kappa_s(t) = \frac{\mathbf{a}(t) \cdot R_{90}(\mathbf{v}(t))}{\|\mathbf{v}(t)\|^3}.$$

Důkaz:

- Pro parametrizaci obloukem platí

$$\kappa_s(t) = \mathbf{a}(t) \cdot R_{90}(\mathbf{v}(t)).$$

- Pro obecnou parametrizaci

$$\kappa_s(t) = \frac{\mathbf{a}(t) \cdot R_{90}\left(\dfrac{\mathbf{v}(t)}{\|\mathbf{v}(t)\|}\right)}{\|\mathbf{v}(t)\|^2} = \frac{\mathbf{a}(t) \cdot R_{90}(\mathbf{v}(t))}{\|\mathbf{v}(t)\|^3}.$$

$\square$

- Pro $\gamma(t) = [x(t), y(t)]$ dostáváme

$$\kappa_s(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{\left(x'(t)^2 + y'(t)^2\right)^{3/2}}.$$

Vztah mezi znaménkovou a neznaménkovou křivostí

Lemma (Vztah mezi κ_s a κ)

Nechť $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ je regulární rovinná křivka. Pak pro každé $t \in I$ platí:

$$|\kappa_s(t)| = \kappa(t).$$

Důkaz:

- Zvolme parametrizaci obloukem, tedy $\|\mathbf{v}(t)\| = 1$.
- Ze zavedení znaménkové křivosti:

  $$\mathbf{a}(t) = \kappa_s(t)\, R_{90}(\mathbf{v}(t)),$$

  a tedy

  $$\|\mathbf{a}(t)\| = |\kappa_s(t)|.$$

- Současně pro parametrizaci obloukem platí

  $$\kappa(t) = \|\mathbf{a}(t)\|.$$

$\square$

Obsah plochy ohraničené křivkou

Tvrzení (Greenův vzorec pro obsah)

Nechť $\gamma : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^2$, kde $\gamma(t) = [x(t), y(t)]$, je jednoduchá, regulární, orientovaná a uzavřená rovinná křivka. Pak obsah plochy ohraničené touto křivkou je

$$A = \frac{1}{2}\int_a^b \big(x(t)y'(t) - y(t)x'(t)\big)\,dt.$$

Ekvivalentně:

$$A = \int_a^b x(t)y'(t)\,dt = -\int_a^b y(t)x'(t)\,dt.$$

- Orientovaná křivka je křivka se zvoleným směrem procházení její stopy.
- Integrál udává orientovaný obsah: je kladný při orientaci proti směru hodinových ručiček a záporný při orientaci po směru hodinových ručiček.

Příklad (Obsah elipsy)

Spočítejte obsah plochy ohraničené elipsou s parametrizací

$$\gamma(t) = [a\cos t,\, b\sin t], \quad t \in \langle 0, 2\pi\rangle.$$

Úhlová funkce

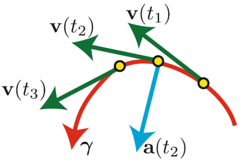
- Pro rovinnou křivku $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ s jednotkovou rychlostí platí $\mathbf{v}(t) \in S^1$.
- Směr pohybu lze vyjádřit pomocí úhlové funkce $\theta(t)$, která sleduje natočení vektoru $\mathbf{v}(t)$.
- Znaménková křivost $\kappa_s(t)$ udává rychlost otáčení jehly kompasu (kladná = levotočivě).

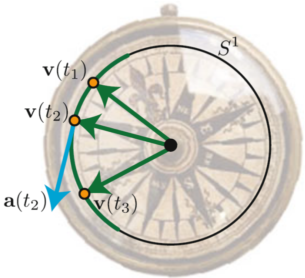
Tvrzení (Existence úhlové funkce)

Nechť $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ je rovinná křivka parametrizovaná obloukem. Potom existuje hladká úhlová funkce $\theta : I \to \mathbb{R}$ taková, že

$$\gamma'(t) = \mathbf{v}(t) = (\cos\theta(t), \sin\theta(t)).$$

Je určena jednoznačně až na posunutí o 2π.





Rotační index rovinné křivky

- Rotační index udává celkový počet levotočivých otoček tečného směru podél křivky.

Definice (Rotační index)

Nechť $\gamma : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^2$ je regulární uzavřená rovinná křivka (parametrizovaná obloukem). Zvolme spojitou úhlovou funkci $\theta : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ takovou, že

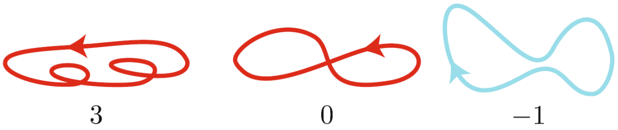
$$\mathbf{v}(t) = \gamma'(t) = (\cos\theta(t), \sin\theta(t)).$$

Pak rotační index křivky γ definujeme vztahem

$$\operatorname{ind}(\gamma) = \frac{1}{2\pi}\big(\theta(b) - \theta(a)\big).$$

- Protože křivka je uzavřená, platí $\theta(b) - \theta(a) \in 2\pi\mathbb{Z}$, takže $\operatorname{ind}(\gamma) \in \mathbb{Z}$.
- Platí také integrální vyjádření:

$$\operatorname{ind}(\gamma) = \frac{1}{2\pi}\int_a^b \kappa_s(t)\,\|\gamma'(t)\|\,dt.$$



Osnova

Prostorové křivky

- V prostoru $\mathbb{R}^3$ máme k dispozici vektorový součin, který umožňuje vyjádřit kolmost a obsah rovnoběžníku pomocí vektorů.

Tvrzení (Vzorec pro křivost prostorové křivky)

Nechť $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ je regulární prostorová křivka. Potom

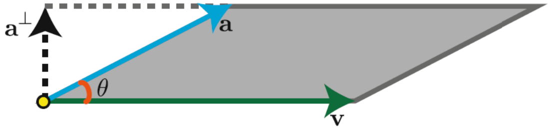
$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{v}(t) \times \mathbf{a}(t)\|}{\|\mathbf{v}(t)\|^3}.$$

Důkaz:

- Platí $\|\mathbf{a}^\perp(t)\| = \|\mathbf{a}(t)\| \sin\theta$, kde θ je úhel mezi vektory $\mathbf{v}(t)$ a $\mathbf{a}(t)$.
- Dosazením do definice křivosti dostáváme

$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{a}^\perp(t)\|}{\|\mathbf{v}(t)\|^2} = \frac{\|\mathbf{a}(t)\| \sin\theta}{\|\mathbf{v}(t)\|^2}.$$

- Použitím vztahu $\|\mathbf{v}(t) \times \mathbf{a}(t)\| = \|\mathbf{v}(t)\| \, \|\mathbf{a}(t)\| \sin\theta$ dostáváme dokazovaný vzorec. $\square$



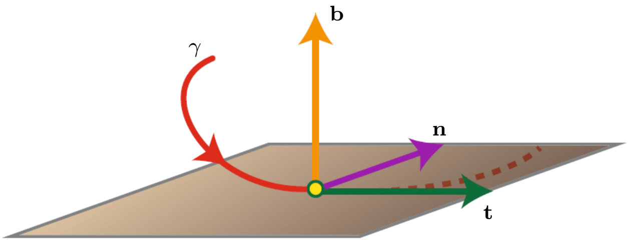
Frenetův repér v prostoru

Definice (Frenetův repér)

Nechť $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ je regulární prostorová křivka a $\kappa(t) \neq 0$ v bodě $t \in I$. Frenetův repér v čase t je ortonormální báze prostoru $\mathbb{R}^3$ tvořená vektory

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{v}(t)}{\|\mathbf{v}(t)\|}, \qquad \mathbf{n}(t) = \frac{\mathbf{a}^{\perp}(t)}{\|\mathbf{a}^{\perp}(t)\|} = \frac{\mathbf{t}'(t)}{\|\mathbf{t}'(t)\|}, \qquad \mathbf{b}(t) = \mathbf{t}(t) \times \mathbf{n}(t).$$

- $\mathbf{t}(t)$ – jednotkový tečný vektor,
- $\mathbf{n}(t)$ – jednotkový normálový vektor,
- $\mathbf{b}(t)$ – jednotkový binormálový vektor.



Torze

- Torze měří, jak rychle se mění náklon oskulační roviny podél křivky γ.
- Přirozeným kandidátem je velikost derivace binormály $\|\mathbf{b}'(t)\|$, ale tato veličina:
  - závisí na parametrizaci,
  - neobsahuje informaci o směru změny (nemá znaménko).
- Z podmínek $\mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = 1$ a $\mathbf{b}\cdot\mathbf{t} = 0$ derivováním dostaneme $\mathbf{b}'\cdot\mathbf{b} = 0$ a $\mathbf{b}'\cdot\mathbf{t} = 0$, tedy $\mathbf{b}' \perp \mathbf{b}$ i $\mathbf{t}$.
- Vektor $\mathbf{b}'(t)$ je tedy rovnoběžný s $\mathbf{n}(t)$.
- Proto použijeme orientovanou velikost změny ve směru $\mathbf{n}(t)$ a podělíme rychlostí.

Definice (Torze prostorové křivky)

Nechť $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ je regulární prostorová křivka a $\kappa(t) \neq 0$. Torze křivky γ v bodě $t \in I$ je definována jako

$$\tau(t) = -\frac{\mathbf{b}'(t)\cdot\mathbf{n}(t)}{\|\mathbf{v}(t)\|}.$$

- Z rovnoběžnosti $\mathbf{b}'(t)$ a $\mathbf{n}(t)$ plyne $\mathbf{b}'(t) = \|\mathbf{v}(t)\|\,\tau(t)\,\mathbf{n}(t)$ (viz Frenetovy rovnice).

Invariantnost torze vůči reparametrizaci

Tvrzení (Invariantnost torze vůči orientaci zachovávajícím reparametrizacím)

Torze $\tau(t)$ je nezávislá na orientaci zachovávajících reparametrizacích.

Důkaz:

- Nechť $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \phi$ je reparametrizace. Budeme značit veličiny odpovídající $\tilde{\gamma}$ vlnkou.
- Je-li $\phi'(t) > 0$ (zachování orientace), pak se Frenetův repér nemění:

$$\tilde{\mathbf{t}} = \mathbf{t} \circ \phi, \qquad \tilde{\mathbf{n}} = \mathbf{n} \circ \phi, \qquad \tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{b} \circ \phi.$$

- Potom

$$\tilde{\tau}(t) = -\frac{\tilde{\mathbf{b}}'(t) \cdot \tilde{\mathbf{n}}(t)}{\|\tilde{\mathbf{v}}(t)\|} = -\frac{\phi'(t)\,\mathbf{b}'(\phi(t)) \cdot \mathbf{n}(\phi(t))}{|\phi'(t)|\,\|\mathbf{v}(\phi(t))\|} = \tau(\phi(t)).$$

- Je-li $\phi'(t) < 0$ (změna orientace), pak

$$\tilde{\mathbf{t}} = -\mathbf{t} \circ \phi, \qquad \tilde{\mathbf{n}} = \mathbf{n} \circ \phi, \qquad \tilde{\mathbf{b}} = -\mathbf{b} \circ \phi,$$

  a ve výrazu pro torzi se objeví navíc záporné znaménko, takže platí

$$\tilde{\tau}(t) = -\tau(\phi(t)).$$

$\square$

Vzorec pro torzi pomocí smíšeného součinu

Tvrzení (Vzorec pro torzi)

Nechť $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ je třikrát diferencovatelná regulární křivka a $\kappa(t) \neq 0$. Pak torze $\tau(t)$ je dána vzorcem

$$\tau(t) = \frac{(\gamma'(t) \times \gamma''(t)) \cdot \gamma'''(t)}{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|^2}.$$

Důkaz:

Nechť $\mathbf{v} = \gamma'$, $\mathbf{a} = \gamma''$, $\mathbf{k} = \gamma'''$. Platí:

- Frenetův repér:

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}, \qquad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{a}^\perp}{\|\mathbf{a}^\perp\|}, \qquad \mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}.$$

- Z definice torze

$$\tau = -\frac{\mathbf{b}' \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{v}\|}.$$

- Lze ukázat, že

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{a}}{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|}, \qquad \mathbf{b}' \cdot \mathbf{n} = \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{k}}{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|^2}.$$

- Po dosazení dostáváme

$$\tau(t) = \frac{(\gamma'(t) \times \gamma''(t)) \cdot \gamma'''(t)}{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|^2}.$$

□

Torze rovinné křivky

Příklad (Torze rovinné křivky)

Nechť $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ je prostorová křivka ležící v rovině.

- Bez újmy na obecnosti můžeme tuto rovinu zvolit jako rovinu xy, tedy

$$\gamma(t) = [x(t), y(t), 0].$$

- V každém bodě, kde $\kappa(t) = 0$, nejsou vektory $\mathbf{n}(t)$, $\mathbf{b}(t)$ ani torze $\tau(t)$ definovány.
- Je-li $\kappa(t) \neq 0$, pak vektory $\mathbf{t}(t)$ a $\mathbf{n}(t)$ leží v rovině xy a jejich vektorový součin je

$$\mathbf{b}(t) = \mathbf{t}(t) \times \mathbf{n}(t) = (0, 0, \pm 1),$$

  kde znaménko závisí na orientaci křivky (otáčení po nebo proti směru hodinových ručiček).
- Protože $\mathbf{b}(t)$ je na každém intervalu konstantní, platí

$$\tau(t) = 0 \quad \text{v každém bodě, kde je definována.}$$

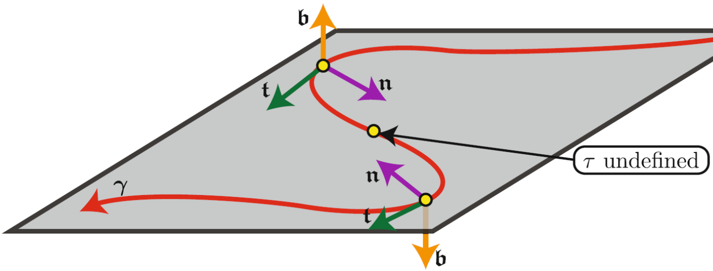
Křivky s nulovou torzí

- Nulová torze znamená, že oskuláční rovina se nemění – tedy křivka zůstává v jedné rovině. To jsme viděli např. u rovinné křivky.

Tvrzení (Charakterizace nulové torze)

Nechť $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ je regulární prostorová křivka a $\kappa(t) \neq 0$ pro všechna $t \in I$. Pak platí

$$\tau(t) = 0 \text{ pro všechna } t \in I \iff \text{stopa křivky leží v rovině.}$$



Frenetovy rovnice

Tvrzení (Frenetovy rovnice)

Nechť $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ je regulární prostorová křivka a $\kappa(t) \neq 0$. Pak platí

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}' \\ \mathbf{b}' \end{pmatrix} = \|\mathbf{v}(t)\| \begin{pmatrix} 0 & \kappa(t) & 0 \\ -\kappa(t) & 0 & \tau(t) \\ 0 & -\tau(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}.$$

Důkaz:

- Nechť
$$\mathbf{Q}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{t}(t) & \mathbf{n}(t) & \mathbf{b}(t) \end{pmatrix}.$$
Protože $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ je ortonormální báze, platí $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^\top = \mathbf{I}$.
- Derivací dostaneme
$$\mathbf{Q}'\mathbf{Q}^\top = -(\mathbf{Q}'\mathbf{Q}^\top)^\top.$$
- Matice $\mathbf{A}(t) = \mathbf{Q}'\mathbf{Q}^\top$ je tedy antisymetrická a má tvar
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix}.$$
- Z $\mathbf{t}' = \|\mathbf{v}\|\kappa\,\mathbf{n}$ plyne $\alpha = \|\mathbf{v}\|\kappa$ a $\beta = 0$.
- Z $\mathbf{b}' = \|\mathbf{v}\|\tau\mathbf{n}$ dostáváme $\gamma = \|\mathbf{v}\|\tau$.
- Protože $\mathbf{Q}' = \mathbf{A}\mathbf{Q}$, vyjdou Frenetovy rovnice. $\square$

Invarianty křivky vůči shodnostem

- Shodnost může křivku např. posunout, otočit nebo zrcadlit, ale nemění její tvar.

Tvrzení (Invarianty vůči shodnostem)

Pro regulární křivku platí, že následující veličiny jsou invariantní vůči přímým shodnostem:

- křivost κ v $\mathbb{R}^n$,
- torze τ prostorové křivky,
- znaménková křivost κ_s rovinné křivky.

Nepřímé shodnosti (např. zrcadlení) zachovávají křivost κ, ale mění znaménko torze a znaménkové křivosti:

$$\tau \mapsto -\tau, \qquad \kappa_s \mapsto -\kappa_s.$$

Základní věty o rovinných a prostorových křivkách

Věta (Základní věty o rovinných a prostorových křivkách)

- Rovinné křivky
  - Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a $\kappa_s : I \to \mathbb{R}$ je hladká funkce. Pak existuje křivka $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ parametrizovaná obloukem, jejíž znaménková křivost je rovna κ_s.
  - Jsou-li $\gamma, \hat{\gamma} : I \to \mathbb{R}^2$ dvě takové křivky, pak existuje přímá shodnost f roviny $\mathbb{R}^2$ taková, že
  $$\hat{\gamma} = f \circ \gamma.$$
- Prostorové křivky
  - Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a $\kappa, \tau : I \to \mathbb{R}$ jsou hladké funkce, kde $\kappa(t) > 0$ pro všechna $t \in I$. Pak existuje křivka $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ parametrizovaná obloukem, jejíž křivost je κ a torze τ.
  - Jsou-li $\gamma, \hat{\gamma} : I \to \mathbb{R}^3$ dvě takové křivky, pak existuje přímá shodnost f prostoru $\mathbb{R}^3$ taková, že
  $$\hat{\gamma} = f \circ \gamma.$$

- Rovinná křivka je jednoznačně určena (až na přímé shodnosti) svou znaménkovou křivostí.
- Prostorová křivka je jednoznačně určena (až na přímé shodnosti) svou křivostí a torzí.

Konstrukce rovinné křivky ze znaménkové křivosti

- Nechť $I \subset \mathbb{R}$ a $\kappa_s : I \to \mathbb{R}$ je hladká funkce.
- Zvolme $t_0 \in I$ a pro jednoduchost počáteční podmínky
$$\gamma(t_0) = [0,0], \qquad \mathbf{v}(t_0) = (1,0).$$
- Definujeme úhlovou funkci
$$\theta(t) = \int_{t_0}^{t} \kappa_s(u)\,du + 0.$$
- Definujeme rychlost
$$\mathbf{v}(t) = (\cos\theta(t), \sin\theta(t)).$$
Pak $\|\mathbf{v}(t)\| = 1$ a $\theta'(t) = \kappa_s(t)$.
- Nakonec definujeme křivku
$$\gamma(t) = \int_{t_0}^{t} \mathbf{v}(u)\,du + [0,0].$$
- Takto získaná křivka je parametrizovaná obloukem, má znaménkovou křivost κ_s a splňuje zvolené počáteční podmínky.
- Změnou počátečních podmínek $\gamma(t_0)$ a $\mathbf{v}(t_0)$ dostaneme všechny křivky se stejnou znaménkovou křivostí.