



FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD
ZÁPADOČESKÉ UNIVERZITY
V PLZNI

KATEDRA
MATEMATIKY

KMA/GKP GEOMETRIE KŘIVEK A PLOCH

Diferenciální geometrie ploch

Parametrická plocha

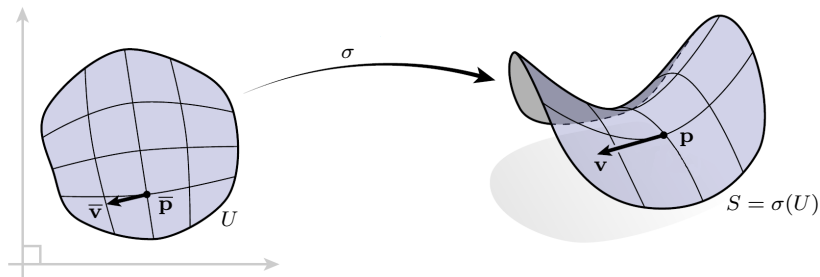
Definice (Parametrická plocha)

Parametrická plocha je zobrazení třídy alespoň C^1

$$\sigma : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

kde $U \subset \mathbb{R}^2$ je oblast. Obraz $S = \sigma(U) \subset \mathbb{R}^3$ budeme nazývat **plocha**.

- ▶ Zobrazení σ je třídy C^k , pokud má spojité parciální derivace do řádu k .
- ▶ Zobrazení σ přiřazuje bodům $\bar{\mathbf{p}} = [u, v] \in U$ body $\mathbf{p} = \sigma(\bar{\mathbf{p}}) = [x, y, z] \in S$.
- ▶ Dvojice $[u, v] \in U$ se nazývá **lokální souřadnice bodu** $\mathbf{p} \in S$ vzhledem k parametrizaci σ .



Křivka na ploše

- ▶ Necht' je dána parametrická plocha

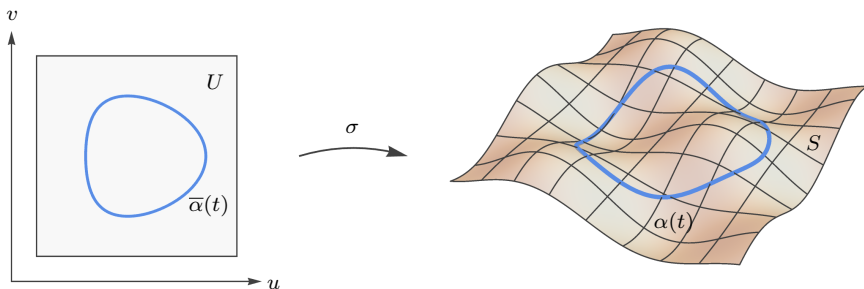
$$\sigma : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

- ▶ Uvažujme křivku v parametrické oblasti

$$\bar{\alpha} : I \rightarrow U, \quad \bar{\alpha}(t) = [u(t), v(t)].$$

- ▶ Její **obraz na ploše** získáme složením zobrazení:

$$\alpha(t) = (\sigma \circ \bar{\alpha})(t) = \sigma(u(t), v(t)).$$



Regulární parametrická plocha

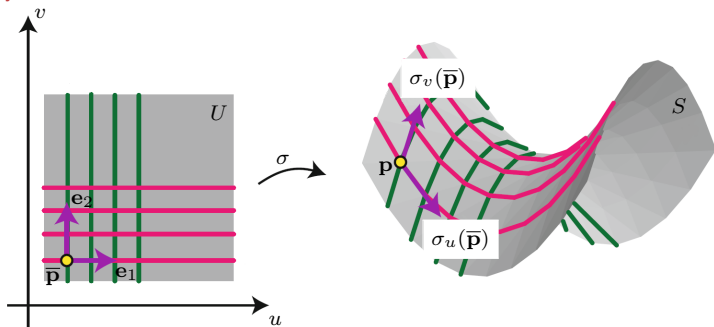
Definice (Regulární parametrická plocha)

Plocha $S = \sigma(U)$ se nazývá **regulární**, pokud v každém bodě $\bar{\mathbf{p}} \in U$ jsou vektory

$$\sigma_u(\bar{\mathbf{p}}) \quad \text{a} \quad \sigma_v(\bar{\mathbf{p}})$$

lineárně nezávislé, kde σ_u a σ_v jsou parciální derivace funkce σ podle u , resp. v .

- ▶ Vektory σ_u, σ_v dávají v bodě tečné směry na ploše.
- ▶ Křivky na ploše odpovídající rovnici $u = \text{konst.}$ a $v = \text{konst.}$ se nazývají **parametrické křivky**.

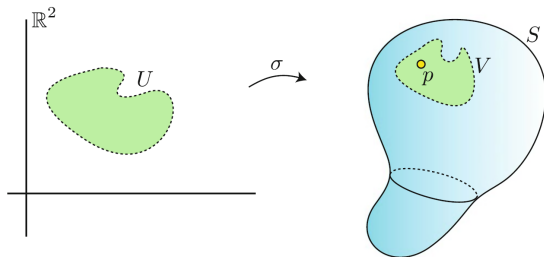


Obecnější definice plochy (nebudeme používat)

- ▶ Obecně se **regulární plocha** $S \subset \mathbb{R}^3$ definuje tak, že každý bod $p \in S$ má okolí $V \subset S$, které je **hladce bijektivně** zobrazené (difeomorfně) na nějakou otevřenou množinu $U \subset \mathbb{R}^2$:

$$\sigma : U \rightarrow V.$$

Tomuto zobrazení říkáme **mapa**.



- ▶ Jedna parametrizace obvykle nestačí – například kouli nelze pokrýt jedinou hladkou mapou bez degenerace (např. na pólech).
- ▶ Obecné plochy proto vyžadují více map, které se hladce překrývají. Soubor všech těchto map tvoří **atlas plochy**.
- ▶ V tomto kurzu budeme ale vždy pracovat jen s **jednou globální parametrizací**:

$$\sigma : U \rightarrow S, \quad S = \sigma(U).$$

Tečný prostor

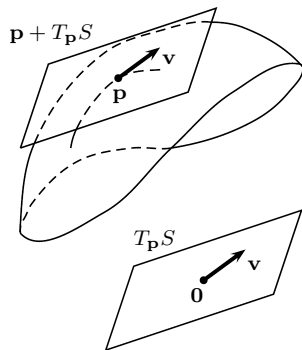
Definice (Tečný prostor)

Nechť $S = \sigma(U)$ je regulární plocha a $\mathbf{p} = \sigma(\bar{\mathbf{p}})$. **Tečný prostor** plochy S v bodě \mathbf{p} je

$$T_{\mathbf{p}}S = \text{span} \{ \sigma_u(\bar{\mathbf{p}}), \sigma_v(\bar{\mathbf{p}}) \}.$$

- ▶ Jde o dvourozměrný **podprostor** vektorového zaměření \mathbb{R}^3 afinního prostoru \mathbb{R}^3 .
- ▶ Každý tečný vektor $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S$ lze vyjádřit jako

$$\mathbf{v} = v_1 \sigma_u(\bar{\mathbf{p}}) + v_2 \sigma_v(\bar{\mathbf{p}}), \quad v_1, v_2 \in \mathbb{R}.$$
- ▶ **Tečná rovina** je potom **afinní rovina** $\mathbf{p} + T_{\mathbf{p}}S$, která vznikne posunutím tečného prostoru $T_{\mathbf{p}}S$ do bodu \mathbf{p} .



Tečná rovina

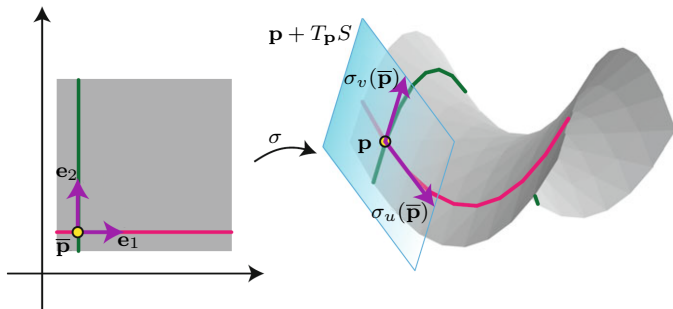
Definice (Tečná rovina)

Tečná rovina plochy S v bodě \mathbf{p} je afinní rovina vzniklá posunutím tečného prostoru do bodu \mathbf{p} :

$$\mathbf{p} + T_{\mathbf{p}}S = \{ \mathbf{p} + \mathbf{v} ; \mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S \}.$$

- ▶ Jde o **afinní podprostor** afinního prostoru \mathbb{R}^3 .
- ▶ Parametricky ji lze zapsat ve tvaru

$$\mathbf{x}(u, v) = \mathbf{p} + u\sigma_u(\bar{\mathbf{p}}) + v\sigma_v(\bar{\mathbf{p}}), \quad u, v \in \mathbb{R}.$$



Diferenciál

- ▶ Množina $U \subset \mathbb{R}^2$ může být chápána jako regulární plocha, přičemž v každém bodě $\bar{\mathbf{p}} \in U$ platí: $T_{\bar{\mathbf{p}}}U \cong \mathbb{R}^2$.

Definice (Diferenciál parametrizace)

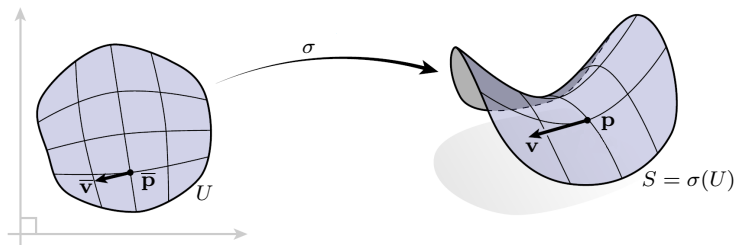
Mějme parametrickou plochu

$$\sigma : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \bar{\mathbf{p}} \mapsto \mathbf{p} = \sigma(\bar{\mathbf{p}}).$$

Diferenciál v bodě $\mathbf{p} = \sigma(\bar{\mathbf{p}})$ je lineární zobrazení

$$d\sigma_{\mathbf{p}} : T_{\bar{\mathbf{p}}}U \rightarrow T_{\mathbf{p}}S, \quad \bar{\mathbf{v}} \mapsto \mathbf{v} = d\sigma_{\mathbf{p}}(\bar{\mathbf{v}}).$$

- ▶ Diferenciál zobrazuje „vektory v parametrické rovině“ na tečné vektory na ploše.



Diferenciál – Jacobiho matice

Definice (Matice diferenciálu)

Diferenciál $d\sigma_{\mathbf{p}}$ parametrizace

$$\sigma(u, v) = [x(u, v), y(u, v), z(u, v)]$$

v bodě $\mathbf{p} = \sigma(\bar{\mathbf{p}})$ je vzhledem ke standardní bázi v \mathbb{R}^2 a standardní bázi v \mathbb{R}^3 určen **Jacobiho maticí**

$$\mathbf{J}_{\sigma}(\bar{\mathbf{p}}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(\bar{\mathbf{p}}) & \frac{\partial x}{\partial v}(\bar{\mathbf{p}}) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(\bar{\mathbf{p}}) & \frac{\partial y}{\partial v}(\bar{\mathbf{p}}) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(\bar{\mathbf{p}}) & \frac{\partial z}{\partial v}(\bar{\mathbf{p}}) \end{pmatrix}.$$

- ▶ Připomeňme, že sloupce této matice $\sigma_u(\bar{\mathbf{p}})$ a $\sigma_v(\bar{\mathbf{p}})$ generují tečný prostor $T_{\mathbf{p}}S$.
- ▶ Vektor $\bar{\mathbf{v}} \in T_{\bar{\mathbf{p}}}U$ se zobrazí na vektor $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S$ podle vztahu

$$\mathbf{v} = \mathbf{J}_{\sigma}(\bar{\mathbf{p}}) \bar{\mathbf{v}},$$

kde vektory v maticovém násobení chápeme vždy jako sloupcové.

- ▶ Souřadnice vektoru $\bar{\mathbf{v}}$ jsou tedy **souřadnice vektoru \mathbf{v} v bázi $\{\sigma_u(\bar{\mathbf{p}}), \sigma_v(\bar{\mathbf{p}})\}$.**

Tvrzení

Parametrická plocha $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ je **regulární v bodě $\mathbf{p} = \sigma(\bar{\mathbf{p}})$** , pokud má Jacobiho matice $\mathbf{J}_{\sigma}(\bar{\mathbf{p}})$ **hodnost 2**.

Příklad: Parametrická plocha, tečná rovina a diferenciál

Příklad (Paraboloid)

Mějme parametrizaci paraboloidu

$$\sigma(u, v) = [u, v, u^2 + v^2], \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

- ▶ Bod s lokálními souřadnicemi $\bar{\mathbf{p}} = [1, 2]$ se zobrazí na bod plochy

$$\mathbf{p} = \sigma(\bar{\mathbf{p}}) = [1, 2, 5].$$

- ▶ Parciální derivace v bodě $\bar{\mathbf{p}}$ generují tečnou rovinu $T_{\mathbf{p}}S$

$$\sigma_u(\bar{\mathbf{p}}) = (1, 0, 2), \quad \sigma_v(\bar{\mathbf{p}}) = (0, 1, 4).$$

- ▶ Diferenciál $d\sigma_{\mathbf{p}}$ je popsán Jacobiho maticí

$$\mathbf{J}_{\sigma}(\bar{\mathbf{p}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

- ▶ Vektor $\bar{\mathbf{v}} = (1, -1) \in T_{\bar{\mathbf{p}}}U$ se zobrazí jako

$$\mathbf{v} = d\sigma_{\mathbf{p}}(\bar{\mathbf{v}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Normálový vektor k ploše

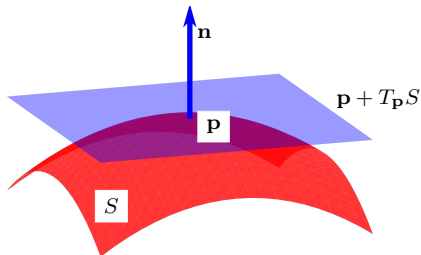
Definice (Normálový vektor)

Vektor $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ se nazývá **normálový vektor** k ploše S v bodě $\mathbf{p} \in S$, pokud platí:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{pro všechna } \mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S.$$

- ▶ **Jednotkový normálový vektor** je normálový vektor délky 1.
- ▶ Pokud $S = \sigma(U)$ je regulární plocha a $\mathbf{p} = \sigma(\bar{\mathbf{p}})$, potom jednotkový normálový vektor k ploše v bodě \mathbf{p} je dán vztahem:

$$\mathbf{n} = \frac{\sigma_u(\bar{\mathbf{p}}) \times \sigma_v(\bar{\mathbf{p}})}{\|\sigma_u(\bar{\mathbf{p}}) \times \sigma_v(\bar{\mathbf{p}})\|}.$$



Vektorová pole na ploše

Definice (Vektorové pole na ploše)

Vektorové pole na regulární ploše S je zobrazení třídy alespoň C^1

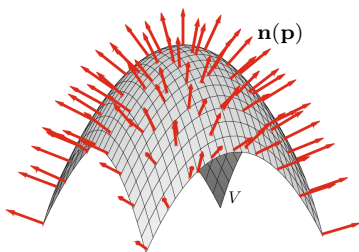
$$\mathbf{v} : S \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

Nazývá se:

- ▶ **tečné pole**, pokud $\mathbf{v}(\mathbf{p}) \in T_{\mathbf{p}}S$,
- ▶ **normálové pole**, pokud $\mathbf{v}(\mathbf{p})$ je normálový vektor k ploše S v bodě \mathbf{p} ,

pro všechna $\mathbf{p} \in S$.

- ▶ Jednotkové normálové pole typicky značíme $\mathbf{n}(\mathbf{p})$.



Orientace na ploše

Definice (Orientace plochy)

Orientace regulární plochy znamená **jednotkové normálové pole** na ní.

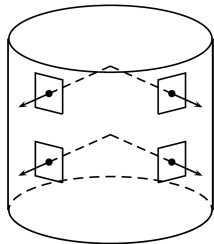
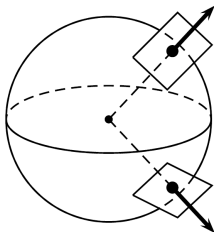
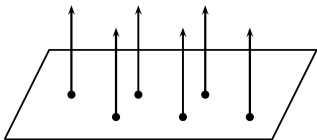
- ▶ Plocha S se nazývá **orientovatelná**, pokud na ní existuje orientace.
- ▶ Orientovatelná plocha spolu s volbou konkrétní orientace se nazývá **orientovaná plocha**.
- ▶ Orientace určuje, která strana plochy je považována za „horní“.
- ▶ Každý jednotkový normálový vektor si lze představit jako šipku ukazující „směr ven“ z plochy.
- ▶ Každá orientovatelná plocha má přesně dvě orientace, které se liší volbou pole \mathbf{n} nebo $-\mathbf{n}$.



Příklady orientovatelných ploch

Příklad (Rovina, sféra, válec)

- ▶ **Rovina** xy má konstantní normálové pole $\mathbf{n}(\mathbf{p}) = (0, 0, 1)$.
- ▶ **Sféra** S^2 má přirozené normálové pole $\mathbf{n}(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$ (pokud zvolíme orientaci „ven z koule“).
- ▶ **Válec** $S^1 \times \mathbb{R}$ má normálové pole $\mathbf{n}(x, y, z) = (x, y, 0)$ (pokud osa válce je z -ová osa).

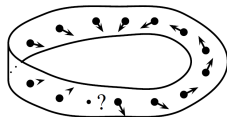
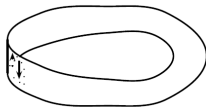
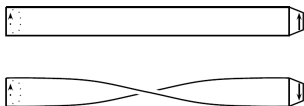


Neorientovatelnost Möbiova listu

Příklad

Möbiův list S není orientovatelný.

- ▶ Neexistuje spojitě jednotkové normálové pole definované na celém listu.
- ▶ Pokud se pokusíme definovat normálový vektor a oběhneme celý list, po návratu se orientace vektoru obrátí.
- ▶ Möbiův list má jen **jednu stranu** a **jednu hranu**, což znemožňuje globální volbu jednotkové normály – tedy globální orientaci.



- ▶ Orientace plochy je nezbytná pro určení např. **druhé fundamentální formy**, **hlavních křivostí** a **střední křivosti**.

První fundamentální forma – motivace

- ▶ Nechť máme dva tečné vektory plochy $S = \sigma(U)$ v bodě \mathbf{p} dané svými **lokálními souřadnicemi** $\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^2$.
- ▶ Skutečné tečné vektory v $T_{\mathbf{p}}S$ dostaneme pomocí Jacobiho matice:

$$\mathbf{u} = \mathbf{J}_{\sigma} \bar{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{J}_{\sigma} \bar{\mathbf{v}}.$$

- ▶ Jejich skalární součin v \mathbb{R}^3 spočteme jako

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{J}_{\sigma} \bar{\mathbf{u}})^{\top} (\mathbf{J}_{\sigma} \bar{\mathbf{v}}) = \bar{\mathbf{u}}^{\top} \underbrace{\mathbf{J}_{\sigma}^{\top} \mathbf{J}_{\sigma}}_{\mathbf{I}} \bar{\mathbf{v}}.$$

- ▶ Matice $\mathbf{I} = \mathbf{J}_{\sigma}^{\top} \mathbf{J}_{\sigma}$ je **Gramova matice** bázových vektorů σ_u, σ_v a určuje skalární součin v **lokálních souřadnicích**.
- ▶ Zobrazení, které dvojici lokálních souřadnic $\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}$ přiřazuje skalární součin odpovídajících vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S$, se nazývá **první fundamentální forma**.
- ▶ Matici \mathbf{I} budeme nazývat **matice první fundamentální formy**.

První fundamentální forma (v lokálních souřadnicích)

- ▶ První fundamentální forma popisuje vnitřní geometrii plochy – umožňuje měřit délky, úhly a obsahy přímo na ploše pouze pomocí lokálních souřadnic.

Definice (Koeficienty první fundamentální formy)

Nechť $S = \sigma(U)$ je regulární plocha. Čísla

$$E = \sigma_u \cdot \sigma_u, \quad F = \sigma_u \cdot \sigma_v, \quad G = \sigma_v \cdot \sigma_v$$

se nazývají koeficienty první fundamentální formy v bázi $\{\sigma_u, \sigma_v\}$.

- ▶ První fundamentální forma je popsána maticí

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

- ▶ Pro dva tečné vektory

$$\mathbf{u} = a\sigma_u + b\sigma_v, \quad \mathbf{v} = c\sigma_u + d\sigma_v$$

platí

$$I_{\mathbf{P}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}}_{\bar{\mathbf{u}}^T} \underbrace{\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}}_{\mathbf{I}} \underbrace{\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}}_{\bar{\mathbf{v}}}.$$

Výpočty pomocí první fundamentální formy

- ▶ Matice **první fundamentální formy** $\mathbf{I}(u, v)$ nám umožňuje měřit délky, úhly a obsahy **na ploše**, pouze pomocí údajů z parametrické roviny.

Tvrzení

Mějme křivky $\alpha(t) = \sigma(\bar{\alpha}(t))$, $t \in I$ a $\beta(s) = \sigma(\bar{\beta}(s))$, $s \in J$ na ploše $S = \sigma(U)$ takové, že $\alpha(t_0) = \beta(s_0) = \mathbf{p}$. Potom:

- ▶ **Délka křivky** α :

$$L = \int_I \sqrt{\bar{\alpha}'(t)^\top \mathbf{I}(\bar{\alpha}(t)) \bar{\alpha}'(t)} dt$$

- ▶ **Úhel mezi křivkami** α, β v bodě \mathbf{p} :

$$\cos \varphi = \frac{\bar{\alpha}'(t_0)^\top \mathbf{I}(\bar{\mathbf{p}}) \bar{\beta}'(s_0)}{\sqrt{\bar{\alpha}'(t_0)^\top \mathbf{I}(\bar{\mathbf{p}}) \bar{\alpha}'(t_0)} \sqrt{\bar{\beta}'(s_0)^\top \mathbf{I}(\bar{\mathbf{p}}) \bar{\beta}'(s_0)}}.$$

- ▶ **Plocha obrazu oblasti** $D \subset U$ na ploše:

$$\text{Area}(\sigma(D)) = \iint_D \sqrt{\det \mathbf{I}(u, v)} du dv$$

- ▶ Všechny tyto výpočty jsou **vnitřní** – nezávisí na uložení plochy v prostoru.

Příklad: délka křivky na paraboloidu

Příklad (Paraboloid)

Mějme parametrizaci $\sigma(u, v)$ a křivku $\alpha(t) = \sigma(\bar{\alpha}(t))$, kde

$$\sigma(u, v) = [u, v, u^2 + v^2], \quad u, v \in \mathbb{R}, \quad \bar{\alpha}(t) = [t, t], \quad t \in [0, 1].$$

- ▶ Parciální derivace:

$$\sigma_u = (1, 0, 2u), \quad \sigma_v = (0, 1, 2v).$$

- ▶ Matice první fundamentální formy:

$$\mathbf{I}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 + 4u^2 & 4uv \\ 4uv & 1 + 4v^2 \end{pmatrix}.$$

- ▶ 1) Délka křivky přes 1FF:

$$L = \int_0^1 \sqrt{(1 \quad 1) \mathbf{I}(t, t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} dt = \int_0^1 \sqrt{2 + 16t^2} dt \approx 1,864.$$

- ▶ 2) Jako prostorová (3D) křivka:

$$\alpha'(t) = (1, 1, 4t), \quad \|\alpha'(t)\| = \sqrt{2 + 16t^2},$$

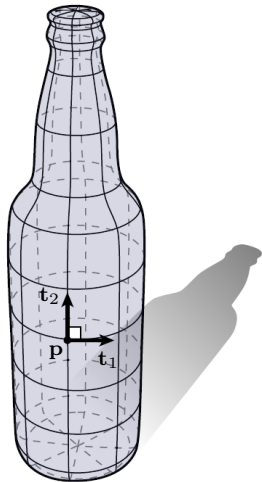
takže dostáváme stejný integrál.

Motivace: normálová křivost

- ▶ Když mluvíme o **křivosti** plochy, máme většinou jasnou představu, např.

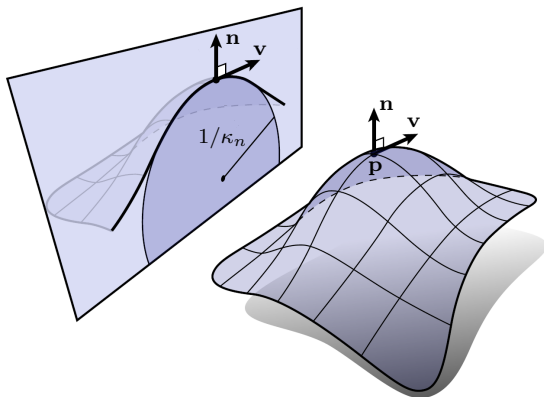
míč je křivý, vs. stůl je rovný.

- ▶ Ale co třeba pivní láhev?
 - ▶ V jednom směru (kolem láhve) je zakřivená,
 - ▶ ve druhém směru (podél láhve) je rovná.
- ▶ Na ploše proto nestačí říct „má křivost“, je třeba měřit křivost ve zvoleném směru v daném bodě.
- ▶ Tento pojem nazýváme **normálová křivost**.
- ▶ Z normálové křivosti získáme další typy křivostí, jako je **Gaussova** nebo **střední**.



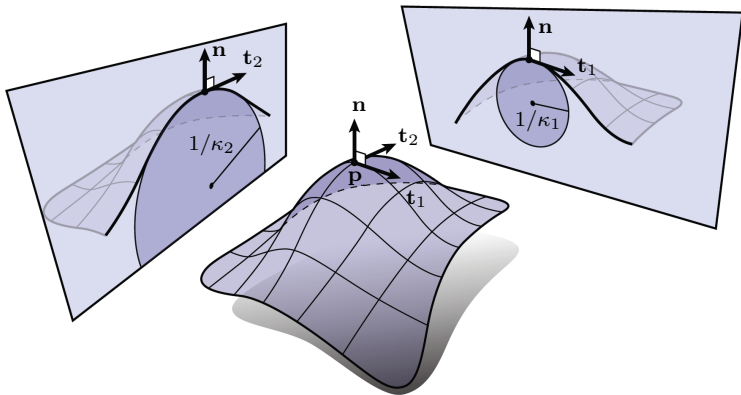
Co to je normálová křivost

- ▶ Uvažujme **normálovou rovinu** plochy S v bodě \mathbf{p} , která je určena
 - ▶ bodem \mathbf{p} na ploše,
 - ▶ vektorem $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S$ (směr v tečné rovině),
 - ▶ normálovým vektorem \mathbf{n} plochy S v bodě \mathbf{p} .
- ▶ Průnikem této roviny s plochou je rovinná křivka, jejíž znaménková křivost v bodě \mathbf{p} je **normálová křivost** $\kappa_n(\mathbf{v})$.



Hlavní směry a hlavní křivosti

- ▶ V každém bodě p se můžeme ptát: ve kterých směrech se plocha zakřivuje nejvíce a ve kterých nejméně?
- ▶ Směry, kde je normálová křivost maximální a minimální, nazýváme **hlavní směry** t_1, t_2 .
- ▶ Odpovídající křivosti se nazývají **hlavní křivosti** κ_1, κ_2 .



Druhá fundamentální forma (v lokálních souřadnicích)

- ▶ Od tohoto místa dál budeme předpokládat, že σ je třídy alespoň C^2 .
- ▶ První fundamentální forma popisuje měření v tečné rovině (délky, úhly).
- ▶ Druhá fundamentální forma popisuje zakřivení plochy vzhledem k normále.

Definice (Koeficienty druhé fundamentální formy)

Nechť $S = \sigma(U)$ je regulární orientovaná plocha a $\mathbf{n}(u, v)$ je její jednotkové normálové pole. Čísla

$$e = \sigma_{uu} \cdot \mathbf{n}, \quad f = \sigma_{uv} \cdot \mathbf{n}, \quad g = \sigma_{vv} \cdot \mathbf{n}$$

se nazývají koeficienty druhé fundamentální formy v bázi $\{\sigma_u, \sigma_v\}$.

- ▶ Druhá fundamentální forma je popsána maticí

$$\mathbf{II} = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}.$$

- ▶ Pro dva tečné vektory

$$\mathbf{u} = a\sigma_u + b\sigma_v, \quad \mathbf{v} = c\sigma_u + d\sigma_v$$

platí

$$\mathbf{II}_{\mathbf{P}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}}_{\bar{\mathbf{u}}^T} \underbrace{\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}}_{\mathbf{II}} \underbrace{\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}}_{\bar{\mathbf{v}}}.$$

Normálová křivost v souřadnicích

Definice (Normálová křivost)

Normálová křivost plochy $S = \sigma(U)$ v bodě \mathbf{p} ve směru $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S$ je definována jako:

$$\kappa_n(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{II}_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}, \mathbf{v})}{\mathbf{I}_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}, \mathbf{v})}.$$

- ▶ V bázi $\{\sigma_u, \sigma_v\}$ zapíšeme směr

$$\mathbf{v} = a\sigma_u + b\sigma_v,$$

tj. $\bar{\mathbf{v}} = (a, b)$ jsou lokální souřadnice vektoru \mathbf{v} .

- ▶ Maticově zapíšeme normálovou křivost ve směru \mathbf{v} vztahem:

$$\kappa_n(\mathbf{v}) = \frac{\bar{\mathbf{v}}^T \mathbf{II} \bar{\mathbf{v}}}{\bar{\mathbf{v}}^T \mathbf{I} \bar{\mathbf{v}}}.$$

- ▶ Ekvivalentně:

$$\kappa_n(\mathbf{v}) = \frac{ea^2 + 2fab + gb^2}{Ea^2 + 2Fab + Gb^2}.$$

Hlavní křivosti a hlavní směry

Definice (Hlavní křivosti a hlavní směry)

Nechť S je orientovaná regulární plocha a $\mathbf{p} \in S$.

- ▶ **Hlavní křivosti** κ_1, κ_2 v bodě \mathbf{p} jsou **maximální a minimální hodnoty normálové křivosti** $\kappa_n(\mathbf{v})$ pro tečné vektory $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S$.
- ▶ Směry \mathbf{t}_i , ve kterých je normálová křivost těchto hodnot dosažena, se nazývají **hlavní směry**.

- ▶ Normálová křivost má tvar podílu dvou kvadratických forem, tj. (zobecněného) Rayleighova podílu:

$$\kappa_n(\mathbf{v}) = \frac{\bar{\mathbf{v}}^\top \mathbf{II} \bar{\mathbf{v}}}{\bar{\mathbf{v}}^\top \mathbf{I} \bar{\mathbf{v}}}.$$

- ▶ Je známý výsledek, že extrémy tohoto podílu nastávají právě pro směry splňující rovnici

$$(\mathbf{II} - \kappa \mathbf{I}) \bar{\mathbf{v}} = \mathbf{0}.$$

- ▶ Tato soustava má netriviální řešení právě tehdy, když

$$\det(\mathbf{II} - \kappa \mathbf{I}) = \det \begin{pmatrix} e - \kappa E & f - \kappa F \\ f - \kappa F & g - \kappa G \end{pmatrix} = 0.$$

- ▶ Po roznásobení a úpravě dostáváme kvadratickou rovnici pro hlavní křivosti κ_1, κ_2 :

$$(EG - F^2)\kappa^2 - (eG - 2fF + gE)\kappa + (eg - f^2) = 0.$$

Určení hlavních směrů

- ▶ Pro nalezené hlavní křivosti κ_1, κ_2 určíme odpovídající směry řešením soustavy

$$(\mathbf{II} - \kappa_i \mathbf{I}) \bar{\mathbf{t}}_i = \mathbf{0}, \quad i = 1, 2.$$

- ▶ Jedná se o homogenní lineární soustavu, která má nenulové řešení právě pro hodnoty κ_i .
- ▶ Po rozepsání dostáváme

$$\begin{pmatrix} e - \kappa_i E & f - \kappa_i F \\ f - \kappa_i F & g - \kappa_i G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2.$$

- ▶ Nenulová řešení $\bar{\mathbf{t}}_i = (a_i, b_i)$ určí hlavní směry v lokálních souřadnicích.
- ▶ Odpovídající tečné vektory jsou

$$\mathbf{t}_i = \mathbf{J}_\sigma(\bar{\mathbf{p}}) \bar{\mathbf{t}}_i = a_i \sigma_u(\bar{\mathbf{p}}) + b_i \sigma_v(\bar{\mathbf{p}}), \quad i = 1, 2.$$

Gaussova a střední křivost

Definice (Gaussova a střední křivost)

Mějme hlavní křivosti κ_1, κ_2 v bodě $\mathbf{p} \in S$.

- ▶ **Gaussova křivost** je součin hlavních křivostí:

$$K = \kappa_1 \kappa_2$$

- ▶ **Střední křivost** je aritmetický průměr hlavních křivostí:

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}.$$

- ▶ Gaussovu a střední křivost lze spočítat přímo z koeficientů první a druhé fundamentální formy:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)}.$$

- ▶ Hlavní křivosti jsou pak kořeny kvadratické rovnice

$$\kappa^2 - 2H\kappa + K = 0,$$

tedy

$$\kappa_{1,2} = H \pm \sqrt{H^2 - K}.$$

Alternativní výpočet hlavních křivostí a směrů

- ▶ Hlavní křivosti a hlavní směry lze získat také jako **vlastní čísla a vlastní vektory Weingartenova zobrazení**.
- ▶ Nechť $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ je regulární parametrická plocha a $\mathbf{p} = \sigma(\bar{\mathbf{p}})$.
- ▶ **Weingartenovo zobrazení** popisuje, jak se vektor normály mění při pohybu po ploše.
- ▶ V bázi $\{\sigma_u, \sigma_v\}$ je reprezentováno maticí

$$\mathbf{W}(\bar{\mathbf{p}}) = \mathbf{I}^{-1} \mathbf{II} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix},$$

kde

$$\begin{aligned} E &= \sigma_u \cdot \sigma_u, & F &= \sigma_u \cdot \sigma_v, & G &= \sigma_v \cdot \sigma_v, \\ e &= \sigma_{uu} \cdot \mathbf{n}, & f &= \sigma_{uv} \cdot \mathbf{n}, & g &= \sigma_{vv} \cdot \mathbf{n}. \end{aligned}$$

- ▶ **Vlastní čísla** matice \mathbf{W} jsou **hlavní křivosti** κ_1, κ_2 .
- ▶ **Vlastní vektory** $\bar{\mathbf{t}}_1, \bar{\mathbf{t}}_2$ udávají hlavní směry v parametrických souřadnicích a skutečné směry na ploše jsou

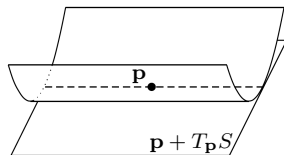
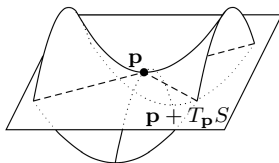
$$\mathbf{t}_i = \mathbf{J}_\sigma(\bar{\mathbf{p}}) \bar{\mathbf{t}}_i, \quad i = 1, 2.$$

Typy bodů na ploše podle Gaussovy křivosti

Definice (Klasifikace bodů)

Body $\mathbf{p} \in S$ rozlišujeme podle hodnoty Gaussovy křivosti $K(\mathbf{p})$:

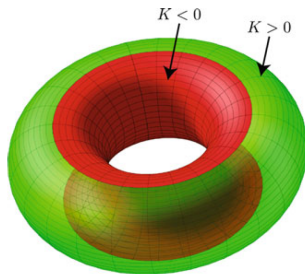
- ▶ eliptický bod – $K > 0$,
- ▶ hyperbolický bod – $K < 0$,
- ▶ parabolický bod – $K = 0$.



Příklady ploch podle typu bodů

Příklad

- ▶ Plocha pouze s **eliptickými body**: sféra.
- ▶ Plocha pouze s **hyperbolickými body**: hyperbolický paraboloid.
- ▶ Plocha pouze s **parabolickými body**: kužel (mimo vrchol), válec.
- ▶ Plocha obsahující **všechny typy bodů**: torus.



Kolmost hlavních směrů a Eulerova identita

Tvrzení (Kolmost hlavních směrů)

Pokud jsou hlavní křivosti v bodě \mathbf{p} různé, $\kappa_1 \neq \kappa_2$, pak odpovídající hlavní směry $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$ jsou v tečné rovině $T_{\mathbf{p}}S$ navzájem kolmé.

Tvrzení (Eulerova identita)

Pro libovolný jednotkový vektor

$$\mathbf{v}_\varphi = \cos \varphi \mathbf{t}_1 + \sin \varphi \mathbf{t}_2 \in T_{\mathbf{p}}S$$

platí

$$\kappa_n(\varphi) = \kappa_1 \cos^2 \varphi + \kappa_2 \sin^2 \varphi.$$

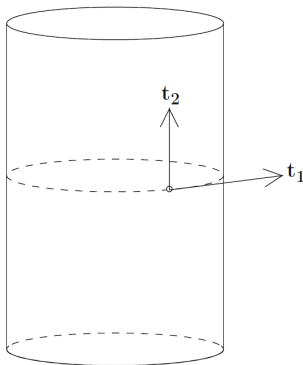
- ▶ Normálová křivost v libovolném směru je „vážený průměr“ hlavních křivostí.
- ▶ Extrémy normálové křivosti nastávají právě v hlavních směrech $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$.

Hlavní směry na válci

Příklad (Hlavní směry na válci)

Na rotačním válci jsou hlavní směry dány

- ▶ směrem \mathbf{t}_1 podél kružnic, kde $\kappa_1 = \frac{1}{r}$,
- ▶ směrem \mathbf{t}_2 podél osy válce, kde $\kappa_2 = 0$.



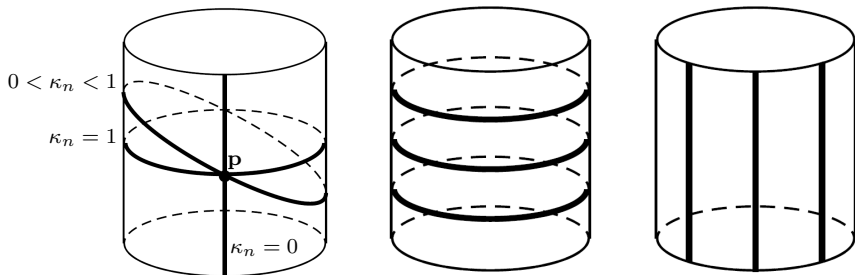
Hlavní křivky

Definice (Hlavní křivka)

Parametrizovaná křivka $\gamma : I \rightarrow S$ na orientované regulární ploše S se nazývá **hlavní křivka**, jestliže v každém bodě platí, že tečný vektor $\gamma'(t)$ je hlavní směr.

Příklad

Hlavní křivky na válci jsou přímky (podél osy) a kružnice (kolmé na osu).



Asymptotické směry a křivky

Definice (Asymptotický směr)

Vektor $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S$ na orientované regulární ploše S se nazývá **asymptotický směr** v bodě \mathbf{p} , pokud pro něj platí

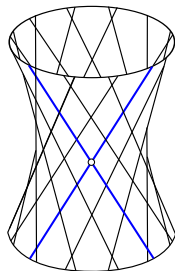
$$\kappa_n(\mathbf{v}) = 0.$$

Definice (Asymptotická křivka)

Parametrizovaná křivka $\gamma : I \rightarrow S$ na orientované regulární ploše S se nazývá **asymptotická křivka**, jestliže v každém bodě platí, že tečný vektor $\gamma'(t)$ je asymptotický směr.

Příklad

Na jednodílném rotačním hyperboloidu tvoří asymptotické křivky dvě navzájem sdružené rodiny přímek.



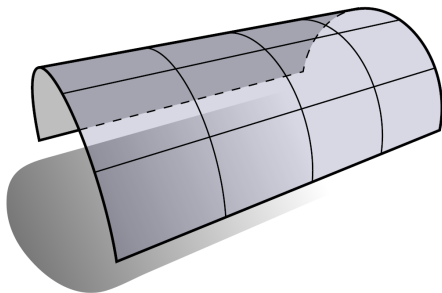
Rozvinutelné plochy

Definice (Rozvinutelná plocha)

Orientovaná regulární plocha S se nazývá **rozvinutelná**, pokud je její Gaussova křivost identicky nulová, tj. $K(\mathbf{p}) = 0$ pro všechna $\mathbf{p} \in S$.

Příklad

Příklady rozvinutelných ploch: válec, kužel, plocha tečen prostorové křivky.



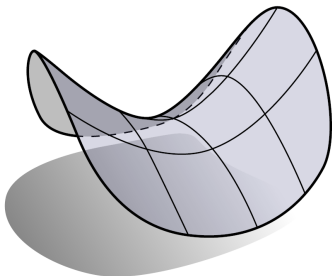
Minimální plochy

Definice (Minimální plocha)

Orientovaná regulární plocha S se nazývá **minimální**, pokud je její střední křivost identicky nulová, tj. $H(\mathbf{p}) = 0$ pro všechna $\mathbf{p} \in S$.

Příklad

Příklady minimálních ploch: rovina, helicoid, catenoid.



Theorema egregium

Věta (Gaussovo theorema egregium)

Gaussova křivost orientované regulární plochy S je **vnitřní veličina**: lze ji vyjádřit pouze pomocí první fundamentální formy (jejích koeficientů a jejich derivací), tedy jen z vnitřních měření na ploše.

- ▶ Gaussova křivost je invariantní vůči izometriím – nezávisí na tom, jak je plocha ohnuta v okolním prostoru, pokud se při ohnutí nezmění délky a úhly na ploše.
- ▶ Lze ji určit pouze z měření na ploše (např. délky, úhly), aniž bychom znali, jak je plocha uložena v prostoru.

Příklad

Například nelze rozvinout část sféry do roviny bez zkreslení, protože sféra má kladnou Gaussovou křivost, zatímco rovina nulovou.