Vybrané příklady z diferenciální geometrie – délka křivky a parametrizace obloukem

Délka křivky

Délka regulární parametrické křivky $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ je dána vztahem

$$L = \int_I \|\gamma'(t)\| \, \mathrm{d}t.$$

Příklad 1 – délka kružnice

Určete délku křivky

$$\gamma(t) = [R\cos t,\ R\sin t], \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle, \quad R > 0.$$

Derivace křivky je

$$\gamma'(t) = (-R\sin t,\ R\cos t).$$

Proto

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t} = R.$$

Tedy

$$L = \int_0^{2\pi} R \, \mathrm{d}t = 2\pi R.$$

Příklad 2 – délka elipsy

Určete délku křivky

$$\gamma(t) = [a\cos t,\ b\sin t], \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle, \quad a, b > 0.$$

Derivace křivky je

$$\gamma'(t) = (-a\sin t,\ b\cos t).$$

Proto

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}.$$

Tedy

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t} \, \mathrm{d}t.$$

Tento integrál nelze obecně vyjádřit pomocí elementárních funkcí.

Příklad 3 – délka paraboly

Určete délku křivky

$$\gamma(t) = [t, t^2], \quad t \in \langle 0, 1\rangle.$$

Derivace křivky je

$$\gamma'(t) = (1, 2t), \qquad \|\gamma'(t)\| = \sqrt{1+4t^2}.$$

Délka křivky je

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+4t^2}\, dt.$$

Použijeme substituci

$$2t = \sinh u, \qquad dt = \frac{1}{2}\cosh u\, du.$$

Pro $t = 0$ je $u = 0$ a pro $t = 1$ je $u = \operatorname{arsinh}(2)$.
Potom

$$\sqrt{1+4t^2} = \cosh u,$$

a tedy

$$L = \frac{1}{2}\int_0^{\operatorname{arsinh}(2)} \cosh^2 u\, du.$$

Použijeme vztah

$$\cosh^2 u = \frac{\cosh 2u + 1}{2},$$

odkud

$$L = \frac{1}{4}\int_0^{\operatorname{arsinh}(2)} \big(\cosh 2u + 1\big)\, du = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\sinh 2u + u\right]_0^{\operatorname{arsinh}(2)}.$$

Dostáváme

$$L = \frac{1}{8}\sinh\big(2\operatorname{arsinh}(2)\big) + \frac{1}{4}\operatorname{arsinh}(2).$$

Protože

$$\operatorname{arsinh}(2) = \ln(2+\sqrt{5}), \qquad \sinh\big(2\operatorname{arsinh}(2)\big) = 4\sqrt{5},$$

platí

$$L = \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{4}\ln(2+\sqrt{5}).$$

Příklad 4 – délka cykloidy

Určete délku křivky

$$\gamma(t) = [t - \sin t,\ 1 - \cos t], \quad t \in \langle 0, 2\pi\rangle.$$

Derivace křivky je

$$\gamma'(t) = (1 - \cos t,\ \sin t).$$

Proto

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t} = \sqrt{2 - 2\cos t}.$$

Délka křivky je

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\, \mathrm{d}t.$$

Použijeme identitu

$$2 - 2\cos t = 4\sin^2\frac{t}{2},$$

a proto
$$\sqrt{2-2\cos t} = 2\left|\sin\frac{t}{2}\right|.$$
Na intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$ platí $\sin\frac{t}{2} \geq 0$, tedy
$$L = \int_0^{2\pi} 2\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t.$$
Substitucí $u = \frac{t}{2}$, $\mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}u$, dostaneme
$$L = 4\int_0^{\pi} \sin u\,\mathrm{d}u = 4[-\cos u]_0^{\pi} = 4(1+1) = 8.$$

Příklad 5 – délka šroubovice

Určete délku křivky
$$\gamma(t) = [\cos t,\ \sin t,\ t], \quad t \in \langle 0, 2\pi\rangle.$$
Derivace křivky je
$$\gamma'(t) = (-\sin t,\ \cos t,\ 1).$$
Proto
$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}.$$
Délka křivky je
$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\,\mathrm{d}t = 2\pi\sqrt{2}.$$

Příklad 6 – délka Tschirnhausenovy kubiky

Určete délku křivky
$$\gamma(t) = [t^2-1,\ t^3-t], \quad t \in \langle -1, 1\rangle.$$
Derivace křivky je
$$\gamma'(t) = (2t,\ 3t^2-1).$$
Proto
$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{4t^2 + (3t^2-1)^2} = \sqrt{9t^4 - 2t^2 + 1} = 3t^2 + 1,$$
protože $9t^4 - 2t^2 + 1 = (3t^2+1)^2$.
Délka křivky je
$$L = \int_{-1}^{1} (3t^2+1)\,\mathrm{d}t = [t^3+t]_{-1}^{1} = 2 - (-2) = 4.$$

Parametrizace obloukem

Pro regulární parametrickou křivku $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ a pevně zvolený bod $t_0 \in I$ definujeme délku oblouku funkcí

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\gamma'(\tau)\| \,\mathrm{d}\tau.$$

Protože $\|\gamma'(t)\| > 0$, je funkce $s(t)$ ostře rostoucí, a tedy prostá. Lze ji tedy (teoreticky) invertovat a získat parametrizaci obloukem

$$\widetilde{\gamma}(s) = \gamma(t(s)).$$

V této parametrizaci platí

$$\|\widetilde{\gamma}'(s)\| = 1.$$

Příklad 1 – parametrizace obloukem kružnice

Najděte parametrizaci obloukem křivky

$$\gamma(t) = [R\cos t, R\sin t], \quad t \in \langle 0, 2\pi\rangle.$$

Derivace křivky je

$$\gamma'(t) = (-R\sin t, R\cos t).$$

Velikost derivace je

$$\|\gamma'(t)\| = R.$$

Délka oblouku je

$$s(t) = \int_0^t \|\gamma'(\tau)\|\, d\tau = \int_0^t R\, d\tau = Rt, \qquad s \in \langle 0, 2\pi R\rangle.$$

Inverzní funkce je

$$t = \frac{s}{R}.$$

Parametrizace obloukem je

$$\widetilde{\gamma}(s) = \gamma\left(\frac{s}{R}\right) = \left[R\cos\frac{s}{R}, R\sin\frac{s}{R}\right], \quad s \in \langle 0, 2\pi R\rangle.$$

Příklad 2 – parametrizace obloukem logaritmické spirály

Najděte parametrizaci obloukem křivky

$$\gamma(t) = [e^t\cos t, e^t\sin t], \quad t \in \mathbb{R}.$$

Derivace křivky je

$$\gamma'(t) = \big(e^t(\cos t - \sin t),\, e^t(\sin t + \cos t)\big).$$

Velikost derivace je

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{2}\, e^t.$$

Délka oblouku je

$$s(t) = \int_{-\infty}^{t} \|\gamma'(\tau)\|\, d\tau = \int_{-\infty}^{t} \sqrt{2}\, e^\tau\, d\tau = \left[\sqrt{2}\, e^\tau\right]_{-\infty}^{t} = \sqrt{2}\, e^t, \qquad s \in (0, \infty).$$

Inverzní funkce je

$$t = \ln\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right).$$

Parametrizace obloukem je

$$\widetilde{\gamma}(s) = \gamma\left(\ln\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right) = \left[\frac{s}{\sqrt{2}}\cos\left(\ln\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right), \frac{s}{\sqrt{2}}\sin\left(\ln\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right)\right], \quad s \in (0,\infty).$$

Příklad 3 – parametrizace obloukem cykloidy

Najděte parametrizaci obloukem křivky

$$\gamma(t) = [t - \sin t, 1 - \cos t], \quad t \in \langle 0, 2\pi\rangle.$$

Derivace křivky je

$$\gamma'(t) = (1 - \cos t, \sin t).$$

Velikost derivace je

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t} = \sqrt{2 - 2\cos t} = 2\sin\frac{t}{2}.$$

Délka oblouku je

$$s(t) = \int_0^t \|\gamma'(\tau)\|\,d\tau = \int_0^t 2\sin\frac{\tau}{2}\,d\tau = \left[-4\cos\frac{\tau}{2}\right]_0^t = 4 - 4\cos\frac{t}{2}, \qquad s \in \langle 0, 8\rangle.$$

Inverzní funkce je

$$t = 2\arccos\left(1 - \frac{s}{4}\right).$$

Parametrizace obloukem je

$$\widetilde{\gamma}(s) = \left[2\arccos\left(1-\frac{s}{4}\right) - \sin\left(2\arccos\left(1-\frac{s}{4}\right)\right),\ 1 - \cos\left(2\arccos\left(1-\frac{s}{4}\right)\right)\right], \quad s \in \langle 0, 8\rangle.$$

Příklad 4 – parametrizace obloukem půlkružnice

Najděte parametrizaci obloukem křivky

$$\gamma(t) = [t, -\sqrt{1-t^2}], \quad t \in \langle -1, 1\rangle.$$

Derivace křivky je

$$\gamma'(t) = \left(1, \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right).$$

Velikost derivace je

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + \frac{t^2}{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Délka oblouku je

$$s(t) = \int_0^t \|\gamma'(\tau)\|\,d\tau = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}}\,d\tau = [\arcsin\tau]_0^t = \arcsin t, \qquad s \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle.$$

Inverzní funkce je

$$t = \sin s.$$

Parametrizace obloukem je

$$\widetilde{\gamma}(s) = \left[\sin s, -\sqrt{1-\sin^2 s}\right] = [\sin s, -\cos s], \quad s \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle.$$