Vybrané příklady z diferenciální geometrie – křivost, znaménková křivost a torze

Křivost křivky

Uvažujme regulární křivku $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$. Rychlost a zrychlení jsou dány pomocí první a druhé derivace

$$\mathbf{v}(t) = \gamma'(t), \qquad \mathbf{a}(t) = \gamma''(t).$$

Vektor zrychlení rozložíme na složku rovnoběžnou a kolmou ke směru pohybu:

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}^{\parallel}(t) + \mathbf{a}^{\perp}(t),$$

kde

$$\mathbf{a}^{\parallel}(t) = \frac{\mathbf{a}(t)\cdot\mathbf{v}(t)}{\|\mathbf{v}(t)\|^2}\,\mathbf{v}(t), \qquad \mathbf{a}^{\perp}(t) = \mathbf{a}(t) - \mathbf{a}^{\parallel}(t).$$

Křivost křivky je dána vztahem

$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{a}^{\perp}(t)\|}{\|\mathbf{v}(t)\|^2}.$$

Při výpočtech křivosti v bodě nejprve spočítáme $\mathbf{v}(t)$ a $\mathbf{a}(t)$, poté určíme $\mathbf{v}(t_0)$ a $\mathbf{a}(t_0)$ v konkrétním bodě $\gamma(t_0)$ a dále pracujeme již pouze s číselnými vektory.

Příklad 1 – křivost přímky

Určete křivost křivky

$$\gamma(t) = [t, 2t + 1], \quad t \in \mathbb{R}.$$

Rychlost a zrychlení jsou

$$\mathbf{v}(t) = (1, 2), \qquad \mathbf{a}(t) = (0, 0).$$

Rozklad zrychlení je

$$\mathbf{a}^{\parallel}(t) = \frac{\mathbf{a}(t)\cdot\mathbf{v}(t)}{\|\mathbf{v}(t)\|^2}\,\mathbf{v}(t) = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{a}^{\perp}(t) = \mathbf{0}.$$

Křivost je

$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{a}^{\perp}(t)\|}{\|\mathbf{v}(t)\|^2} = \frac{0}{\|\mathbf{v}(t)\|^2} = 0.$$

Příklad 2 – křivost kružnice

Určete křivost křivky

$$\gamma(t) = [3\cos t + 1,\ 3\sin t - 2], \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Rychlost a zrychlení jsou

$$\mathbf{v}(t) = (-3\sin t,\ 3\cos t), \qquad \mathbf{a}(t) = (-3\cos t,\ -3\sin t).$$

Rozklad zrychlení je

$$\mathbf{a}^{\|}(t) = \frac{\mathbf{a}(t)\cdot\mathbf{v}(t)}{\|\mathbf{v}(t)\|^2}\,\mathbf{v}(t) = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{a}^{\perp}(t) = \mathbf{a}(t).$$

Křivost je

$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{a}^{\perp}(t)\|}{\|\mathbf{v}(t)\|^2} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

Příklad 3 – křivost křivky v bodě

Určete křivost křivky

$$\gamma(t) = [t,\ t^2 + t], \quad t \in \mathbb{R}$$

v bodě $t_0 = 0$.

Rychlost a zrychlení jsou

$$\mathbf{v}(t) = (1,\ 2t+1), \qquad \mathbf{a}(t) = (0,\ 2).$$

V bodě $t_0 = 0$:

$$\mathbf{v}(0) = (1,1), \qquad \mathbf{a}(0) = (0,2).$$

Rozklad zrychlení je

$$\mathbf{a}^{\|}(0) = \frac{\mathbf{a}(0)\cdot\mathbf{v}(0)}{\|\mathbf{v}(0)\|^2}\,\mathbf{v}(0) = \frac{2}{2}(1,1) = (1,1), \qquad \mathbf{a}^{\perp}(0) = \mathbf{a}(0) - \mathbf{a}^{\|}(0) = (0,2) - (1,1) = (-1,1).$$

Křivost je

$$\kappa(0) = \frac{\|\mathbf{a}^{\perp}(0)\|}{\|\mathbf{v}(0)\|^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Příklad 4 – křivost křivky v bodě

Určete křivost křivky

$$\gamma(t) = [-e^t + t^2 - \cos t,\ t^2 + \cos t + \sin t], \quad t \in \mathbb{R}$$

v bodě $t_0 = 0$.

Rychlost a zrychlení jsou

$$\mathbf{v}(t) = (-e^t + 2t + \sin t,\ 2t - \sin t + \cos t),$$
$$\mathbf{a}(t) = (-e^t + 2 + \cos t,\ 2 - \cos t - \sin t).$$

V bodě $t_0 = 0$:

$$\mathbf{v}(0) = (-1,1), \qquad \mathbf{a}(0) = (2,1).$$

Rozklad zrychlení je

$$\mathbf{a}^{\|}(0) = \frac{\mathbf{a}(0)\cdot\mathbf{v}(0)}{\|\mathbf{v}(0)\|^2}\,\mathbf{v}(0) = \frac{-1}{2}(-1,1) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \qquad \mathbf{a}^{\perp}(0) = \mathbf{a}(0) - \mathbf{a}^{\|}(0) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

Křivost je

$$\kappa(0) = \frac{\|\mathbf{a}^{\perp}(0)\|}{\|\mathbf{v}(0)\|^2} = \frac{\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2}}{(-1)^2 + 1^2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

Příklad 5 – křivost křivky v bodě

Určete křivost křivky

$$\gamma(t) = [1 + e^t - \sin t,\ t^2 - \cos t - \sin t,\ t^2 + \cos t + \sin t], \quad t \in \mathbb{R}$$

v bodě $t_0 = 0$.

Rychlost a zrychlení jsou

$$\mathbf{v}(t) = (e^t - \cos t,\ 2t + \sin t - \cos t,\ 2t - \sin t + \cos t),$$
$$\mathbf{a}(t) = (e^t + \sin t,\ 2 + \cos t + \sin t,\ 2 - \cos t - \sin t).$$

V bodě $t_0 = 0$:

$$\mathbf{v}(0) = (0, -1, 1), \qquad \mathbf{a}(0) = (1, 3, 1).$$

Rozklad zrychlení je

$$\mathbf{a}^{\parallel}(0) = \frac{\mathbf{a}(0)\cdot\mathbf{v}(0)}{\|\mathbf{v}(0)\|^2}\,\mathbf{v}(0) = \frac{-2}{2}(0, -1, 1) = (0, 1, -1), \qquad \mathbf{a}^{\perp}(0) = \mathbf{a}(0) - \mathbf{a}^{\parallel}(0) = (1, 2, 2).$$

Křivost je

$$\kappa(0) = \frac{\|\mathbf{a}^{\perp}(0)\|}{\|\mathbf{v}(0)\|^2} = \frac{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}}{0^2 + (-1)^2 + 1^2} = \frac{3}{2}.$$

Příklad 6 – křivost křivky v bodě

Určete křivost křivky

$$\gamma(t) = [1 + t,\ -e^t + t + t^2 + \sin t,\ -1 - t^2 - \sin t], \quad t \in \mathbb{R}$$

v bodě $t_0 = 0$.

Rychlost a zrychlení jsou

$$\mathbf{v}(t) = (1,\ -e^t + 1 + 2t + \cos t,\ -2t - \cos t),$$
$$\mathbf{a}(t) = (0,\ -e^t + 2 - \sin t,\ -2 + \sin t).$$

V bodě $t_0 = 0$:

$$\mathbf{v}(0) = (1, 0, -1), \qquad \mathbf{a}(0) = (0, 1, -2).$$

Rozklad zrychlení je

$$\mathbf{a}^{\parallel}(0) = \frac{\mathbf{a}(0)\cdot\mathbf{v}(0)}{\|\mathbf{v}(0)\|^2}\,\mathbf{v}(0) = \frac{2}{2}(1, 0, -1) = (1, 0, -1), \qquad \mathbf{a}^{\perp}(0) = \mathbf{a}(0) - \mathbf{a}^{\parallel}(0) = (-1, 1, -1).$$

Křivost je

$$\kappa(0) = \frac{\|\mathbf{a}^{\perp}(0)\|}{\|\mathbf{v}(0)\|^2} = \frac{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-1)^2}}{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Znaménková křivost rovinné křivky

Uvažujme regulární rovinnou parametrickou křivku

$$\gamma(t) = [x(t), y(t)], \qquad t \in I.$$

Rychlost a zrychlení jsou dány

$$\mathbf{v}(t) = \gamma'(t) = (x'(t), y'(t)), \qquad \mathbf{a}(t) = \gamma''(t) = (x''(t), y''(t)).$$

Znaménková křivost je definována vztahem

$$\kappa_s(t) = \frac{\mathbf{a}(t) \cdot R_{90}(\mathbf{v}(t))}{\|\mathbf{v}(t)\|^3} = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{\big(x'(t)^2 + y'(t)^2\big)^{3/2}},$$

kde $R_{90}(u_1, u_2) = (-u_2, u_1)$ je otočení vektoru o 90° proti směru hodinových ručiček. Platí

$$\kappa(t) = |\kappa_s(t)|.$$

Příklad 1 – znaménková křivost přímky

Určete znaménkovou křivost a křivost křivky

$$\gamma(t) = [t, 2t + 1], \quad t \in \mathbb{R}.$$

Rychlost a zrychlení jsou

$$\mathbf{v}(t) = (1, 2), \qquad \mathbf{a}(t) = (0, 0).$$

Otočení rychlosti je

$$R_{90}(\mathbf{v}(t)) = (-2, 1).$$

Znaménková křivost je

$$\kappa_s(t) = \frac{\mathbf{a}(t) \cdot R_{90}(\mathbf{v}(t))}{\|\mathbf{v}(t)\|^3} = \frac{0}{(1^2 + 2^2)^{3/2}} = 0.$$

Křivost je

$$\kappa(t) = 0.$$

Příklad 2 – znaménková křivost kružnice

Určete znaménkovou křivost a křivost křivky

$$\gamma(t) = [3\cos t + 1,\ 3\sin t - 2], \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Rychlost a zrychlení jsou

$$\mathbf{v}(t) = (-3\sin t,\ 3\cos t), \qquad \mathbf{a}(t) = (-3\cos t,\ -3\sin t).$$

Otočení rychlosti je

$$R_{90}(\mathbf{v}(t)) = (-3\cos t,\ -3\sin t).$$

Znaménková křivost je

$$\kappa_s(t) = \frac{\mathbf{a}(t) \cdot R_{90}(\mathbf{v}(t))}{\|\mathbf{v}(t)\|^3} = \frac{(-3\cos t,\ -3\sin t) \cdot (-3\cos t,\ -3\sin t)}{\big((-3\sin t)^2 + (3\cos t)^2\big)^{3/2}}$$

$$= \frac{9\cos^2 t + 9\sin^2 t}{\left(9\sin^2 t + 9\cos^2 t\right)^{3/2}} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}.$$

Křivost je

$$\kappa(t) = |\kappa_s(t)| = \frac{1}{3}.$$

Příklad 3 – znaménková křivost křivky v bodě

Určete znaménkovou křivost a křivost křivky

$$\gamma(t) = [t,\ t^2 + t], \quad t \in \mathbb{R}$$

v bodě $t_0 = 0$.

Rychlost a zrychlení jsou

$$\mathbf{v}(t) = (1,\ 2t + 1), \qquad \mathbf{a}(t) = (0,\ 2).$$

V bodě $t_0 = 0$:

$$\mathbf{v}(0) = (1, 1), \qquad \mathbf{a}(0) = (0, 2).$$

Otočení rychlosti je

$$R_{90}(\mathbf{v}(0)) = (-1, 1).$$

Znaménková křivost je

$$\kappa_s(0) = \frac{\mathbf{a}(0) \cdot R_{90}(\mathbf{v}(0))}{\|\mathbf{v}(0)\|^3} = \frac{(0,2)\cdot(-1,1)}{(1^2 + 1^2)^{3/2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Křivost je

$$\kappa(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Příklad 4 – znaménková křivost křivky v bodě

Určete znaménkovou křivost a křivost křivky

$$\gamma(t) = [-e^t + t^2 - \cos t,\ t^2 + \cos t + \sin t], \quad t \in \mathbb{R}$$

v bodě $t_0 = 0$.

Rychlost a zrychlení jsou

$$\mathbf{v}(t) = (-e^t + 2t + \sin t,\ 2t - \sin t + \cos t),$$
$$\mathbf{a}(t) = (-e^t + 2 + \cos t,\ 2 - \cos t - \sin t).$$

V bodě $t_0 = 0$:

$$\mathbf{v}(0) = (-1, 1), \qquad \mathbf{a}(0) = (2, 1).$$

Otočení rychlosti je

$$R_{90}(\mathbf{v}(0)) = (-1, -1).$$

Znaménková křivost je

$$\kappa_s(0) = \frac{\mathbf{a}(0) \cdot R_{90}(\mathbf{v}(0))}{\|\mathbf{v}(0)\|^3} = \frac{(2,1)\cdot(-1,-1)}{\left((-1)^2 + 1^2\right)^{3/2}} = \frac{-3}{2\sqrt{2}} = -\frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

Křivost je

$$\kappa(0) = |\kappa_s(0)| = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

Křivost a torze prostorové křivky

Uvažujme regulární prostorovou křivku $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$. Křivost počítáme pomocí vzorce

$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{v}(t) \times \mathbf{a}(t)\|}{\|\mathbf{v}(t)\|^3} = \frac{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}.$$

Torzi počítáme pomocí vzorce

$$\tau(t) = \frac{(\gamma'(t) \times \gamma''(t)) \cdot \gamma'''(t)}{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|^2}$$

Příklad 1 – křivost a torze šroubovice

Určete křivost a torzi křivky

$$\gamma(t) = [a\cos t,\ a\sin t,\ bt], \quad t \in \mathbb{R}.$$

První, druhá a třetí derivace jsou

$$\begin{aligned}
\gamma'(t) &= (-a\sin t,\ a\cos t,\ b),\\
\gamma''(t) &= (-a\cos t,\ -a\sin t,\ 0),\\
\gamma'''(t) &= (a\sin t,\ -a\cos t,\ 0).
\end{aligned}$$

Vektorový součin je

$$\gamma'(t) \times \gamma''(t) = (ab\sin t,\ -ab\cos t,\ a^2).$$

Křivost je

$$\kappa(t) = \frac{\sqrt{a^2b^2\sin^2 t + a^2b^2\cos^2 t + a^4}}{(a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2)^{3/2}} = \frac{\sqrt{a^2b^2 + a^4}}{(a^2+b^2)^{3/2}} = \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{(a^2+b^2)^{3/2}} = \frac{a}{a^2+b^2}.$$

Torze je

$$\tau(t) = \frac{(ab\sin t,\ -ab\cos t,\ a^2) \cdot (a\sin t,\ -a\cos t,\ 0)}{a^2b^2\sin^2 t + a^2b^2\cos^2 t + a^4} = \frac{a^2b\sin^2 t + a^2b\cos^2 t}{a^2b^2 + a^4} = \frac{a^2b}{a^2(a^2+b^2)} = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

Příklad 2 – křivost a torze kružnice

Určete křivost a torzi křivky

$$\gamma(t) = [R\cos t,\ R\sin t,\ 0], \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

První, druhá a třetí derivace jsou

$$\begin{aligned}
\gamma'(t) &= (-R\sin t,\ R\cos t,\ 0),\\
\gamma''(t) &= (-R\cos t,\ -R\sin t,\ 0),\\
\gamma'''(t) &= (R\sin t,\ -R\cos t,\ 0).
\end{aligned}$$

Vektorový součin je

$$\gamma'(t) \times \gamma''(t) = (0,\ 0,\ R^2).$$

Křivost je

$$\kappa(t) = \frac{\|(0,\ 0,\ R^2)\|}{\big((-R\sin t)^2 + (R\cos t)^2\big)^{3/2}} = \frac{R^2}{(R^2)^{3/2}} = \frac{1}{R}.$$

Torze je

$$\tau(t) = \frac{(0,\ 0,\ R^2)\cdot(R\sin t,\ -R\cos t,\ 0)}{\|(0,\ 0,\ R^2)\|^2} = \frac{0}{R^4} = 0.$$

Příklad 3 – křivost a torze křivky v bodě

Určete křivost a torzi křivky

$$\gamma(t) = [1 + e^t - \sin t,\ t^2 - \cos t - \sin t,\ t^2 + \cos t + \sin t], \quad t \in \mathbb{R}$$

v bodě $t_0 = 0$.

První, druhá a třetí derivace jsou

$$\begin{aligned}
\gamma'(t) &= (e^t - \cos t,\ 2t + \sin t - \cos t,\ 2t - \sin t + \cos t),\\
\gamma''(t) &= (e^t + \sin t,\ 2 + \cos t + \sin t,\ 2 - \cos t - \sin t),\\
\gamma'''(t) &= (e^t + \cos t,\ -\sin t + \cos t,\ \sin t - \cos t).
\end{aligned}$$

V bodě $t_0 = 0$:

$$\gamma'(0) = (0,\ -1,\ 1), \qquad \gamma''(0) = (1,\ 3,\ 1), \qquad \gamma'''(0) = (2,\ 1,\ -1).$$

Vektorový součin je

$$\gamma'(0)\times\gamma''(0) = (-4,\ 1,\ 1).$$

Křivost je

$$\kappa(0) = \frac{\|(-4,\ 1,\ 1)\|}{\|(0,\ -1,\ 1)\|^3} = \frac{\sqrt{16+1+1}}{(1+1)^{3/2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{2}.$$

Torze je

$$\tau(0) = \frac{(-4,\ 1,\ 1)\cdot(2,\ 1,\ -1)}{\|(-4,\ 1,\ 1)\|^2} = \frac{-8+1-1}{16+1+1} = -\frac{4}{9}.$$

Příklad 4 – křivost a torze křivky v bodě

Určete křivost a torzi křivky

$$\gamma(t) = [1 + t,\ -e^t + t + t^2 + \sin t,\ -1 - t^2 - \sin t], \quad t \in \mathbb{R}$$

v bodě $t_0 = 0$.

První, druhá a třetí derivace jsou

$$\begin{aligned}
\gamma'(t) &= (1,\ -e^t + 1 + 2t + \cos t,\ -2t - \cos t),\\
\gamma''(t) &= (0,\ -e^t + 2 - \sin t,\ -2 + \sin t),\\
\gamma'''(t) &= (0,\ -e^t - \cos t,\ \cos t).
\end{aligned}$$

V bodě $t_0 = 0$:

$$\gamma'(0) = (1,\ 0,\ -1), \qquad \gamma''(0) = (0,\ 1,\ -2), \qquad \gamma'''(0) = (0,\ -2,\ 1).$$

Vektorový součin je

$$\gamma'(0) \times \gamma''(0) = (1,\ 2,\ 1).$$

Křivost je

$$\kappa(0) = \frac{\|(1,\ 2,\ 1)\|}{\|(1,\ 0,\ -1)\|^3} = \frac{\sqrt{1+4+1}}{(1+1)^{3/2}} = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Torze je

$$\tau(0) = \frac{(1,\ 2,\ 1)\cdot(0,\ -2,\ 1)}{\|(1,\ 2,\ 1)\|^2} = \frac{-4+1}{1+4+1} = -\frac{1}{2}.$$