Vybrané příklady z diferenciální geometrie – obsah oblasti

Obsah oblasti ohraničené křivkou

Uvažujme rovinnou parametrickou křivku

$$\gamma(t) = [x(t), y(t)], \qquad t \in \langle a, b \rangle.$$

Předpokládejme, že křivka je:
- *uzavřená*, tj. $\gamma(a) = \gamma(b)$,
- *jednoduchá*, tj. nemá samoprůniky,
- *regulární*, tj. $\gamma'(t) \neq \mathbf{0}$ pro všechna $t \in \langle a, b \rangle$.

Pak orientovaný obsah oblasti ohraničené křivkou γ je dán vztahem

$$A = \frac{1}{2} \int_a^b \big(x(t)y'(t) - y(t)x'(t) \big)\, dt.$$

Ekvivalentně lze psát

$$A = \int_a^b x(t)y'(t)\, dt = -\int_a^b y(t)x'(t)\, dt.$$

Poznámka. Znaménko výsledku závisí na orientaci křivky:
- kladná orientace $\Rightarrow A > 0$,
- záporná orientace $\Rightarrow A < 0$.

Poznámka. Podmínku regulárnosti lze oslabit. Vzorec platí i pro křivky, které jsou pouze po částech třídy C^1, tedy mohou mít izolované body, kde $\gamma'(t) = \mathbf{0}$ nebo není definována, pokud křivka zůstává jednoduchá, uzavřená a tvoří hranici oblasti.

Příklad 1 – obsah kružnice

Určete obsah oblasti ohraničené křivkou

$$\gamma(t) = [R\cos t,\ R\sin t], \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Derivace složek jsou

$$x'(t) = -R\sin t, \qquad y'(t) = R\cos t.$$

Obsah je

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} R^2(\cos^2 t + \sin^2 t)\, dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} R^2\, dt = \frac{1}{2} \left[R^2 t \right]_0^{2\pi} = \pi R^2.$$

Příklad 2 – obsah elipsy

Určete obsah oblasti ohraničené křivkou

$$\gamma(t) = [a\cos t,\ b\sin t], \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Derivace složek jsou

$$x'(t) = -a\sin t, \qquad y'(t) = b\cos t.$$

Obsah je

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab(\cos^2 t + \sin^2 t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\,dt = \frac{1}{2}\,[ab\,t]_0^{2\pi} = \pi ab.$$

Příklad 3 – obsah vlnité kružnice

Určete obsah oblasti ohraničené křivkou

$$\gamma(t) = \left[\left(2 + \frac{1}{2}\cos 3t\right)\cos t,\ \left(2 + \frac{1}{2}\cos 3t\right)\sin t\right], \quad t \in \langle 0, 2\pi\rangle.$$

Označme

$$r(t) = 2 + \frac{1}{2}\cos 3t.$$

Derivace složek jsou

$$x'(t) = r'(t)\cos t - r(t)\sin t, \qquad y'(t) = r'(t)\sin t + r(t)\cos t.$$

Potom

$$x(t)y'(t) - y(t)x'(t) = r(t)\cos t\big(r'(t)\sin t + r(t)\cos t\big) - r(t)\sin t\big(r'(t)\cos t - r(t)\sin t\big) = r(t)^2.$$

Obsah je

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r(t)^2\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(2 + \frac{1}{2}\cos 3t\right)^2 dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(4 + 2\cos 3t + \frac{1}{4}\cos^2 3t\right)dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(4 + \frac{1}{4}\cos^2 3t\right)dt \\ &= \frac{1}{2}\left(8\pi + \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\cos^2 3t\,dt\right) = \frac{1}{2}\left(8\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{33\pi}{8}. \end{aligned}$$

Příklad 4 – obsah kardioidy

Určete obsah oblasti ohraničené křivkou

$$\gamma(t) = [(1+\cos t)\cos t,\ (1+\cos t)\sin t], \quad t \in \langle 0, 2\pi\rangle.$$

Derivace složek jsou

$$x'(t) = -(1+\cos t)\sin t - \sin t\cos t, \qquad y'(t) = -\sin^2 t + (1+\cos t)\cos t.$$

Obsah je

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\big(x(t)y'(t) - y(t)x'(t)\big)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos t)^2\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\big(1 + 2\cos t + \cos^2 t\big)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2} + 2\cos t + \frac{1}{2}\cos 2t\right)dt \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}t + 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\cdot 3\pi = \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

Příklad 5 – obsah astroidy

Určete obsah oblasti ohraničené křivkou

$$\gamma(t) = [a\cos^3 t,\ a\sin^3 t], \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Derivace složek jsou

$$x'(t) = -3a\cos^2 t \sin t, \qquad y'(t) = 3a\sin^2 t\cos t.$$

Obsah je

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \big(x(t)y'(t) - y(t)x'(t)\big)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 3a^2\cos^2 t\sin^2 t\,dt \\ &= \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}\cos^2 t\sin^2 t\,dt = \frac{3a^2}{8}\int_0^{2\pi}\sin^2 2t\,dt = \frac{3a^2}{16}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4t)\,dt \\ &= \frac{3a^2}{16}\left(t - \frac{1}{4}\sin 4t\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{3a^2}{16}\cdot 2\pi = \frac{3\pi a^2}{8}. \end{aligned}$$