# Vybrané příklady z diferenciální geometrie – parametrická plocha, tečná rovina, normála a diferenciál

## Tečná rovina, normála a diferenciál

Uvažujme parametrickou plochu $\sigma : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$\sigma(u,v) = [\sigma_1(u,v), \sigma_2(u,v), \sigma_3(u,v)].$$

Bod s lokálními souřadnicemi $\overline{\mathbf{p}} = [u_0, v_0]$ se zobrazí na bod plochy

$$\mathbf{p} = \sigma(\overline{\mathbf{p}}) = [\sigma_1(u_0,v_0), \sigma_2(u_0,v_0), \sigma_3(u_0,v_0)].$$

Parciální derivace $\sigma_u(u,v), \sigma_v(u,v)$ určují tečné vektory k ploše. V bodě $\overline{\mathbf{p}}$ dostáváme

$$\begin{aligned}
\sigma_u(\overline{\mathbf{p}}) &= (\partial_u\sigma_1(u_0,v_0), \partial_u\sigma_2(u_0,v_0), \partial_u\sigma_3(u_0,v_0)),\\
\sigma_v(\overline{\mathbf{p}}) &= (\partial_v\sigma_1(u_0,v_0), \partial_v\sigma_2(u_0,v_0), \partial_v\sigma_3(u_0,v_0)).
\end{aligned}$$

Tyto vektory generují tečný prostor $T_{\mathbf{p}}S$ plochy $S = \sigma(U)$ v bodě $\mathbf{p}$. Tečná rovina $\mathbf{p} + T_{\mathbf{p}}S$ je potom popsána např. parametrizací

$$\varrho(s,t) = \mathbf{p} + s\,\sigma_u(\overline{\mathbf{p}}) + t\,\sigma_v(\overline{\mathbf{p}}), \qquad s,t \in \mathbb{R}.$$

Normálový vektor plochy v bodě $\mathbf{p}$ určíme pomocí vektorového součinu

$$\mathbf{n} = \sigma_u(\overline{\mathbf{p}}) \times \sigma_v(\overline{\mathbf{p}}).$$

Parametrická rovnice normály v bodě $\mathbf{p}$ je

$$\ell(t) = \mathbf{p} + t\,\mathbf{n}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Dále vektory $\sigma_u(\overline{\mathbf{p}}), \sigma_v(\overline{\mathbf{p}})$ tvoří sloupce Jacobiho matice

$$\mathbf{J}_\sigma(\overline{\mathbf{p}}) = \begin{pmatrix}\sigma_u(\overline{\mathbf{p}}) & \sigma_v(\overline{\mathbf{p}})\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\partial_u\sigma_1(u_0,v_0) & \partial_v\sigma_1(u_0,v_0)\\ \partial_u\sigma_2(u_0,v_0) & \partial_v\sigma_2(u_0,v_0)\\ \partial_u\sigma_3(u_0,v_0) & \partial_v\sigma_3(u_0,v_0)\end{pmatrix}.$$

Tato matice popisuje diferenciál $\mathrm{d}\sigma_{\overline{\mathbf{p}}}$ zobrazení $\sigma$.
Vektor $\overline{\mathbf{v}} \in T_{\overline{\mathbf{p}}}U \simeq \mathbb{R}^2$ se zobrazí na tečný vektor plochy $S = \sigma(U)$ v bodě $\mathbf{p} = \sigma(\overline{\mathbf{p}})$

$$\mathbf{v} = \mathrm{d}\sigma_{\overline{\mathbf{p}}}(\overline{\mathbf{v}}) = \mathbf{J}_\sigma(\overline{\mathbf{p}})\,\overline{\mathbf{v}}.$$

## Příklad 1 – tečná rovina, normála a diferenciál

Je dána parametrická plocha

$$\sigma(u,v) = [u,\ v,\ u^2 + uv], \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2,$$

bod s lokálními souřadnicemi

$$\overline{\mathbf{p}} = [1,2]$$

a tečný vektor v bodě $\overline{\mathbf{p}}$ v parametrické rovině

$$\overline{\mathbf{v}} = (2,-1).$$

Určete obraz bodu na ploše, popis tečné roviny a normály v tomto bodě a obraz vektoru $\overline{\mathbf{v}}$.

Obraz bodu na ploše je

$$\mathbf{p} = \sigma(\overline{\mathbf{p}}) = \sigma(1,2) = [1,\ 2,\ 1^2 + 1 \cdot 2] = [1,\ 2,\ 3].$$

Parciální derivace parametrizace jsou

$$\sigma_u(u,v) = (1,\ 0,\ 2u + v), \qquad \sigma_v(u,v) = (0,\ 1,\ u).$$

V bodě $\overline{\mathbf{p}} = [1,2]$ dostáváme

$$\begin{aligned} \sigma_u(\overline{\mathbf{p}}) &= \sigma_u(1,2) = (1,\ 0,\ 4), \\ \sigma_v(\overline{\mathbf{p}}) &= \sigma_v(1,2) = (0,\ 1,\ 1). \end{aligned}$$

Tečná rovina v bodě $\mathbf{p}$ je dána parametrizací

$$\varrho(s,t) = [1,2,3] + s(1,0,4) + t(0,1,1) = [1+s,\ 2+t,\ 3+4s+t], \qquad s,t \in \mathbb{R}.$$

Normálový (obecně ne jednotkový) vektor v bodě $\mathbf{p}$ je

$$\mathbf{n} = \sigma_u(\overline{\mathbf{p}}) \times \sigma_v(\overline{\mathbf{p}}) = (1,0,4) \times (0,1,1) = (-4,\ -1,\ 1).$$

Normála v bodě $\mathbf{p}$ má parametrickou rovnici

$$\ell(t) = [1,2,3] + t(-4,-1,1) = [1-4t,\ 2-t,\ 3+t], \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Jacobiho matice parametrizace je

$$\mathbf{J}_\sigma(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2u+v & u \end{pmatrix}.$$

V bodě $\overline{\mathbf{p}} = [1,2]$ tedy dostáváme

$$\mathbf{J}_\sigma(\overline{\mathbf{p}}) = \mathbf{J}_\sigma(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Obraz vektoru $\overline{\mathbf{v}}$ je

$$\mathbf{v} = \mathrm{d}\sigma_{\overline{\mathbf{p}}}(\overline{\mathbf{v}}) = \mathbf{J}_\sigma(\overline{\mathbf{p}})\,\overline{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$\mathbf{v} = (2,\ -1,\ 7).$$

## Příklad 2 – tečná rovina, normála a diferenciál

Je dána parametrická plocha

$$\sigma(u,v) = [u\cos v,\ u\sin v,\ v], \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2,$$

bod s lokálními souřadnicemi

$$\overline{\mathbf{p}} = [1,0]$$

a tečný vektor v bodě $\overline{\mathbf{p}}$ v parametrické rovině

$$\overline{\mathbf{v}} = (1,2).$$

Určete obraz bodu na ploše, popis tečné roviny a normály v tomto bodě a obraz vektoru $\overline{\mathbf{v}}$.

Obraz bodu na ploše je

$$\mathbf{p} = \sigma(\overline{\mathbf{p}}) = \sigma(1,0) = [1,\ 0,\ 0].$$

Parciální derivace parametrizace jsou

$$\sigma_u(u,v) = (\cos v,\ \sin v,\ 0), \qquad \sigma_v(u,v) = (-u\sin v,\ u\cos v,\ 1).$$

V bodě $\overline{\mathbf{p}} = [1,0]$ dostáváme

$$\sigma_u(\overline{\mathbf{p}}) = (1,\ 0,\ 0), \qquad \sigma_v(\overline{\mathbf{p}}) = (0,\ 1,\ 1).$$

Tečná rovina v bodě $\mathbf{p}$ je dána parametrizací

$$\varrho(s,t) = [1,0,0] + s(1,0,0) + t(0,1,1) = [1+s,\ t,\ t], \qquad s,t \in \mathbb{R}.$$

Normálový (obecně ne jednotkový) vektor v bodě $\mathbf{p}$ je

$$\mathbf{n} = \sigma_u(\overline{\mathbf{p}}) \times \sigma_v(\overline{\mathbf{p}}) = (1,0,0) \times (0,1,1) = (0,\ -1,\ 1).$$

Normála v bodě $\mathbf{p}$ má parametrickou rovnici

$$\ell(t) = [1,0,0] + t(0,-1,1) = [1,\ -t,\ t], \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Jacobiho matice parametrizace je

$$\mathbf{J}_\sigma(u,v) = \begin{pmatrix} \cos v & -u\sin v \\ \sin v & u\cos v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

V bodě $\overline{\mathbf{p}} = [1,0]$ tedy dostáváme

$$\mathbf{J}_\sigma(\overline{\mathbf{p}}) = \mathbf{J}_\sigma(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Obraz vektoru $\overline{\mathbf{v}}$ je

$$\mathbf{v} = \mathrm{d}\sigma_{\overline{\mathbf{p}}}(\overline{\mathbf{v}}) = \mathbf{J}_\sigma(\overline{\mathbf{p}})\,\overline{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$\mathbf{v} = (1,\ 2,\ 2).$$

## Příklad 3 – tečná rovina, normála a diferenciál

Je dána parametrická plocha

$$\sigma(u,v) = [u+v,\ u-v,\ uv], \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2,$$

bod s lokálními souřadnicemi

$$\overline{\mathbf{p}} = [2,1]$$

a tečný vektor v bodě $\overline{\mathbf{p}}$ v parametrické rovině

$$\overline{\mathbf{v}} = (3,-1).$$

Určete obraz bodu na ploše, popis tečné roviny a normály v tomto bodě a obraz vektoru $\overline{\mathbf{v}}$.

Obraz bodu na ploše je

$$\mathbf{p} = \sigma(\overline{\mathbf{p}}) = \sigma(2,1) = [3,\ 1,\ 2].$$

Parciální derivace parametrizace jsou

$$\sigma_u(u,v) = (1,\ 1,\ v), \qquad \sigma_v(u,v) = (1,\ -1,\ u).$$

V bodě $\overline{\mathbf{p}} = [2,1]$ dostáváme

$$\sigma_u(\overline{\mathbf{p}}) = (1,\ 1,\ 1), \qquad \sigma_v(\overline{\mathbf{p}}) = (1,\ -1,\ 2).$$

Tečná rovina v bodě $\mathbf{p}$ je dána parametrizací

$$\varrho(s,t) = [3,1,2] + s(1,1,1) + t(1,-1,2) = [3+s+t,\ 1+s-t,\ 2+s+2t], \qquad s,t \in \mathbb{R}.$$

Normálový (obecně ne jednotkový) vektor v bodě $\mathbf{p}$ je

$$\mathbf{n} = \sigma_u(\overline{\mathbf{p}}) \times \sigma_v(\overline{\mathbf{p}}) = (1,1,1) \times (1,-1,2) = (3,\ -1,\ -2).$$

Normála v bodě $\mathbf{p}$ má parametrickou rovnici

$$\ell(t) = [3,1,2] + t(3,-1,-2) = [3+3t,\ 1-t,\ 2-2t], \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Jacobiho matice parametrizace je

$$\mathbf{J}_\sigma(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ v & u \end{pmatrix}.$$

V bodě $\overline{\mathbf{p}} = [2,1]$ tedy dostáváme

$$\mathbf{J}_\sigma(\overline{\mathbf{p}}) = \mathbf{J}_\sigma(2,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Obraz vektoru $\overline{\mathbf{v}}$ je

$$\mathbf{v} = \mathrm{d}\sigma_{\overline{\mathbf{p}}}(\overline{\mathbf{v}}) = \mathbf{J}_\sigma(\overline{\mathbf{p}})\,\overline{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$\mathbf{v} = (2,\ 4,\ 1).$$

## Příklad 4 – tečná rovina, normála a diferenciál

Je dána parametrická plocha

$$\sigma(u,v) = [u\cos v,\ u\sin v,\ e^v], \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2,$$

bod s lokálními souřadnicemi

$$\overline{\mathbf{p}} = [2,0]$$

a tečný vektor v bodě $\overline{\mathbf{p}}$ v parametrické rovině

$$\overline{\mathbf{v}} = (1,-1).$$

Určete obraz bodu na ploše, popis tečné roviny a normály v tomto bodě a obraz vektoru $\overline{\mathbf{v}}$.

Obraz bodu na ploše je

$$\mathbf{p} = \sigma(\overline{\mathbf{p}}) = \sigma(2,0) = [2,\ 0,\ 1].$$

Parciální derivace parametrizace jsou

$$\sigma_u(u,v) = (\cos v,\ \sin v,\ 0), \qquad \sigma_v(u,v) = (-u\sin v,\ u\cos v,\ e^v).$$

V bodě $\overline{\mathbf{p}} = [2,0]$ dostáváme

$$\sigma_u(\overline{\mathbf{p}}) = (1,\ 0,\ 0), \qquad \sigma_v(\overline{\mathbf{p}}) = (0,\ 2,\ 1).$$

Tečná rovina v bodě $\mathbf{p}$ je dána parametrizací

$$\varrho(s,t) = [2,0,1] + s(1,0,0) + t(0,2,1) = [2+s,\ 2t,\ 1+t], \qquad s,t \in \mathbb{R}.$$

Normálový (obecně ne jednotkový) vektor v bodě $\mathbf{p}$ je

$$\mathbf{n} = \sigma_u(\overline{\mathbf{p}}) \times \sigma_v(\overline{\mathbf{p}}) = (1,0,0) \times (0,2,1) = (0,\ -1,\ 2).$$

Normála v bodě $\mathbf{p}$ má parametrickou rovnici

$$\ell(t) = [2,0,1] + t(0,-1,2) = [2,\ -t,\ 1+2t], \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Jacobiho matice parametrizace je

$$\mathbf{J}_\sigma(u,v) = \begin{pmatrix} \cos v & -u\sin v \\ \sin v & u\cos v \\ 0 & e^v \end{pmatrix}.$$

V bodě $\overline{\mathbf{p}} = [2,0]$ tedy dostáváme

$$\mathbf{J}_\sigma(\overline{\mathbf{p}}) = \mathbf{J}_\sigma(2,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Obraz vektoru $\overline{\mathbf{v}}$ je

$$\mathbf{v} = \mathrm{d}\sigma_{\overline{\mathbf{p}}}(\overline{\mathbf{v}}) = \mathbf{J}_\sigma(\overline{\mathbf{p}})\,\overline{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$\mathbf{v} = (1,\ -2,\ -1).$$