Vybrané příklady z diferenciální geometrie – první fundamentální forma

Matice první fundamentální formy

Uvažujme parametrickou plochu $\sigma : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$\sigma(u,v) = [\sigma_1(u,v), \sigma_2(u,v), \sigma_3(u,v)].$$

Matice první fundamentální formy je dána předpisem

$$\mathbf{I}(u,v) = \begin{pmatrix} E(u,v) & F(u,v) \\ F(u,v) & G(u,v) \end{pmatrix},$$

kde

$$\begin{aligned} E(u,v) &= \sigma_u(u,v) \cdot \sigma_u(u,v), \\ F(u,v) &= \sigma_u(u,v) \cdot \sigma_v(u,v), \\ G(u,v) &= \sigma_v(u,v) \cdot \sigma_v(u,v). \end{aligned}$$

Platí

$$\mathbf{I}(u,v) = \mathbf{J}_\sigma(u,v)^\top \mathbf{J}_\sigma(u,v),$$

kde $\mathbf{J}_\sigma(u,v)$ je Jacobiho matice parametrizace σ.

Příklad 1 – výpočet matice první fundamentální formy

Určete matici první fundamentální formy plochy

$$\sigma(u,v) = [u\cos v,\ u\sin v,\ v], \qquad u,v \in \mathbb{R}.$$

Parciální derivace parametrizace jsou

$$\sigma_u(u,v) = (\cos v,\ \sin v,\ 0), \qquad \sigma_v(u,v) = (-u\sin v,\ u\cos v,\ 1).$$

Proto

$$\begin{aligned} E(u,v) &= \sigma_u(u,v) \cdot \sigma_u(u,v) = \cos^2 v + \sin^2 v = 1, \\ F(u,v) &= \sigma_u(u,v) \cdot \sigma_v(u,v) = \cos v(-u\sin v) + \sin v(u\cos v) + 0 = 0, \\ G(u,v) &= \sigma_v(u,v) \cdot \sigma_v(u,v) = u^2\sin^2 v + u^2\cos^2 v + 1 = u^2 + 1. \end{aligned}$$

Matice první fundamentální formy je

$$\mathbf{I}(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2+1 \end{pmatrix}.$$

Matice první fundamentální formy v bodě

Uvažujme parametrickou plochu $\sigma : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a bod

$$\overline{\mathbf{p}} = [u_0, v_0] \in U.$$

Nejprve spočítáme parciální derivace $\sigma_u(u,v)$ a $\sigma_v(u,v)$ a poté dosadíme bod $\overline{\mathbf{p}}$. Tím dostaneme číselné vektory

$$\sigma_u(\overline{\mathbf{p}}), \qquad \sigma_v(\overline{\mathbf{p}}).$$

Koeficienty první fundamentální formy v bodě $\overline{\mathbf{p}}$ jsou

$$E(\overline{\mathbf{p}}) = \sigma_u(\overline{\mathbf{p}}) \cdot \sigma_u(\overline{\mathbf{p}}),$$

$$F(\overline{\mathbf{p}}) = \sigma_u(\overline{\mathbf{p}}) \cdot \sigma_v(\overline{\mathbf{p}}),$$

$$G(\overline{\mathbf{p}}) = \sigma_v(\overline{\mathbf{p}}) \cdot \sigma_v(\overline{\mathbf{p}}).$$

Matice první fundamentální formy v bodě $\overline{\mathbf{p}}$ je

$$\mathbf{I}(\overline{\mathbf{p}}) = \begin{pmatrix} E(\overline{\mathbf{p}}) & F(\overline{\mathbf{p}}) \\ F(\overline{\mathbf{p}}) & G(\overline{\mathbf{p}}) \end{pmatrix}.$$

Příklad 2 – výpočet matice první fundamentální formy v bodě

Určete matici první fundamentální formy plochy

$$\sigma(u,v) = [u,\ v,\ u^2 + uv], \qquad u, v \in \mathbb{R}$$

v bodě $\overline{\mathbf{p}} = [1,2]$.

Parciální derivace parametrizace jsou

$$\sigma_u(u,v) = (1,\ 0,\ 2u + v), \qquad \sigma_v(u,v) = (0,\ 1,\ u).$$

V bodě $\overline{\mathbf{p}} = [1,2]$ dostáváme

$$\sigma_u(\overline{\mathbf{p}}) = (1,\ 0,\ 4), \qquad \sigma_v(\overline{\mathbf{p}}) = (0,\ 1,\ 1).$$

Proto

$$\begin{aligned} E(\overline{\mathbf{p}}) &= \sigma_u(\overline{\mathbf{p}}) \cdot \sigma_u(\overline{\mathbf{p}}) = 1^2 + 0^2 + 4^2 = 17, \\ F(\overline{\mathbf{p}}) &= \sigma_u(\overline{\mathbf{p}}) \cdot \sigma_v(\overline{\mathbf{p}}) = 0 + 0 + 4 = 4, \\ G(\overline{\mathbf{p}}) &= \sigma_v(\overline{\mathbf{p}}) \cdot \sigma_v(\overline{\mathbf{p}}) = 0^2 + 1^2 + 1^2 = 2. \end{aligned}$$

Matice první fundamentální formy v bodě $\overline{\mathbf{p}}$ je

$$\mathbf{I}(\overline{\mathbf{p}}) = \begin{pmatrix} 17 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Příklad 3 – výpočet matice první fundamentální formy v bodě

Určete matici první fundamentální formy plochy

$$\sigma(u,v) = [u\cos v,\ u\sin v,\ e^v], \qquad u, v \in \mathbb{R}$$

v bodě $\overline{\mathbf{p}} = [2,0]$.

Parciální derivace parametrizace jsou

$$\sigma_u(u,v) = (\cos v,\ \sin v,\ 0), \qquad \sigma_v(u,v) = (-u\sin v,\ u\cos v,\ e^v).$$

V bodě $\overline{\mathbf{p}} = [2,0]$ dostáváme

$$\sigma_u(\overline{\mathbf{p}}) = (1,\ 0,\ 0), \qquad \sigma_v(\overline{\mathbf{p}}) = (0,\ 2,\ 1).$$

Proto

$$\begin{aligned} E(\overline{\mathbf{p}}) &= \sigma_u(\overline{\mathbf{p}}) \cdot \sigma_u(\overline{\mathbf{p}}) = 1^2 + 0^2 + 0^2 = 1, \\ F(\overline{\mathbf{p}}) &= \sigma_u(\overline{\mathbf{p}}) \cdot \sigma_v(\overline{\mathbf{p}}) = 0 + 0 + 0 = 0, \\ G(\overline{\mathbf{p}}) &= \sigma_v(\overline{\mathbf{p}}) \cdot \sigma_v(\overline{\mathbf{p}}) = 0^2 + 2^2 + 1^2 = 5. \end{aligned}$$

Matice první fundamentální formy v bodě $\overline{\mathbf{p}}$ je

$$\mathbf{I}(\overline{\mathbf{p}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Skalární součin dvou tečných vektorů pomocí 1FF

Uvažujme parametrickou plochu $\sigma : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a bod $\overline{\mathbf{p}} = [u_0, v_0] \in U$.
Nechť $\overline{\mathbf{u}} = (a, b), \overline{\mathbf{v}} = (c, d) \in T_{\overline{\mathbf{p}}}U \simeq \mathbb{R}^2$ jsou dva tečné vektory v parametrové rovině.
Jejich skalární součin v tečné rovině k ploše v bodě $\mathbf{p} = \sigma(\overline{\mathbf{p}})$ je dán pomocí matice první fundamentální formy:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \overline{\mathbf{u}}^\top \mathbf{I}(\overline{\mathbf{p}})\, \overline{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}.$$

Příklad 4 – výpočet úhlu dvou tečných vektorů pomocí matice první fundamentální formy

Je dána matice první fundamentální formy

$$\mathbf{I}(\overline{\mathbf{p}}) = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

v bodě $\overline{\mathbf{p}}$ a dva tečné vektory v parametrové rovině

$$\overline{\mathbf{u}} = (1, 1), \qquad \overline{\mathbf{v}} = (2, -1).$$

Určete úhel vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S$ v bodě $\mathbf{p} = \sigma(\overline{\mathbf{p}})$.

Dostáváme

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix} = 9,$$

$$\|\mathbf{u}\|^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = 9,$$

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix} = 18.$$

Pro úhel φ vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ platí

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|} = \frac{9}{3 \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Příklad 5 – výpočet úhlu dvou křivek na ploše ve společném průsečíku

Je dána matice první fundamentální formy

$$\mathbf{I}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + u^2 \end{pmatrix}.$$

Dále jsou v lokálních souřadnicích zadány dvě křivky

$$\overline{\gamma}_1(t) = [1 + t,\ 2 + t], \qquad \overline{\gamma}_2(s) = [1 + s,\ 2 - s], \qquad s, t \in \mathbb{R}.$$

Určete úhel křivek γ_1 a γ_2 na ploše v jejich společném průsečíku.

Nejprve určíme průsečík obou křivek. Musí platit

$$[1 + t,\ 2 + t] = [1 + s,\ 2 - s].$$

Odtud dostáváme soustavu

$$1 + t = 1 + s, \qquad 2 + t = 2 - s,$$

tedy

$$t = s, \qquad t = -s.$$

Proto

$$t = 0, \qquad s = 0.$$

Obě křivky se tedy protínají v bodě

$$\overline{\mathbf{p}} = \overline{\gamma}_1(0) = \overline{\gamma}_2(0) = [1, 2].$$

V tomto bodě je matice první fundamentální formy

$$\mathbf{I}(\overline{\mathbf{p}}) = \mathbf{I}(1, 2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tečné vektory k oběma křivkám v parametrové rovině jsou

$$\overline{\mathbf{u}} = \overline{\gamma}_1'(0) = (1, 1), \qquad \overline{\mathbf{v}} = \overline{\gamma}_2'(0) = (1, -1).$$

Dostáváme

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -1,$$

$$\|\mathbf{u}\|^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3,$$

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 3.$$

Pro úhel φ obou křivek v průsečíku platí

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|} = \frac{-1}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = -\frac{1}{3}.$$

Odtud

$$\varphi = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right).$$

Délka křivky pomocí 1FF

Uvažujme parametrickou plochu $\sigma : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a křivku v lokálních souřadnicích

$$\overline{\gamma}(t) = [u(t), v(t)], \quad t \in I.$$

Délka křivky $\gamma(t) = \sigma(\overline{\gamma}(t))$ na ploše $S = \sigma(U)$ je dána vztahem

$$L = \int_I \|\gamma'(t)\| \, \mathrm{d}t = \int_I \sqrt{\overline{\gamma}'(t)^\top \mathbf{I}(u(t), v(t)) \, \overline{\gamma}'(t)} \, \mathrm{d}t.$$

Příklad 6 – výpočet délky křivky na ploše

Určete délku křivky

$$\overline{\gamma}(t) = [t, 0], \qquad t \in \langle 0, 1 \rangle,$$

na ploše s maticí první fundamentální formy

$$\mathbf{I}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 + v^2 & uv \\ uv & 1 + u^2 \end{pmatrix}.$$

Platí

$$\overline{\gamma}'(t) = (1, 0).$$

Po dosazení $u(t) = t$, $v(t) = 0$ dostáváme

$$\mathbf{I}(u(t), v(t)) = \mathbf{I}(t, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + t^2 \end{pmatrix}.$$

Délka křivky je

$$L = \int_0^1 \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \, \mathrm{d}t = \int_0^1 \sqrt{1} \, \mathrm{d}t = \int_0^1 1 \, \mathrm{d}t = 1.$$

Příklad 7 – výpočet délky křivky na ploše

Určete délku křivky

$$\overline{\gamma}(t) = [t, t], \qquad t \in \langle 0, 1 \rangle,$$

na ploše s maticí první fundamentální formy

$$\mathbf{I}(u, v) = \begin{pmatrix} e^{2u} & 0 \\ 0 & e^{2u} \end{pmatrix}.$$

Platí

$$\overline{\gamma}'(t) = (1, 1).$$

Po dosazení $u(t) = t$, $v(t) = t$ dostáváme

$$\mathbf{I}(u(t), v(t)) = \mathbf{I}(t, t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Délka křivky je

$$L = \int_0^1 \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \, \mathrm{d}t = \int_0^1 \sqrt{2e^{2t}} \, \mathrm{d}t = \sqrt{2} \int_0^1 e^t \, \mathrm{d}t = \sqrt{2}(e - 1).$$

Příklad 8 – výpočet délky křivky na ploše

Určete délku křivky

$$\overline{\gamma}(t) = [t, e^{-t}], \qquad t \in \langle 0, 1 \rangle,$$

na ploše s maticí první fundamentální formy

$$\mathbf{I}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2u} \end{pmatrix}.$$

Platí

$$\overline{\gamma}'(t) = (1, -e^{-t}).$$

Po dosazení $u(t) = t$, $v(t) = e^{-t}$ dostáváme

$$\mathbf{I}(u(t), v(t)) = \mathbf{I}(t, e^{-t}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Délka křivky je

$$L = \int_0^1 \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & -e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -e^{-t} \end{pmatrix}} \, \mathrm{d}t = \int_0^1 \sqrt{2} \, \mathrm{d}t = \sqrt{2}.$$

Obsah plochy pomocí 1FF

Uvažujme parametrickou plochu $\sigma : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a oblast $\Omega \subset U$ v parametrové rovině.
Obsah části plochy

$$S_\Omega = \sigma(\Omega)$$

je dán vztahem

$$A = \iint_\Omega \sqrt{\det \mathbf{I}(u,v)}\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v.$$

Příklad 9 – výpočet obsahu plochy

Určete obsah části plochy

$$\sigma(u,v) = [u,\ v,\ u+v]$$

nad oblastí

$$\Omega = [0,1] \times [0,2].$$

Parciální derivace jsou

$$\sigma_u(u,v) = (1,\ 0,\ 1), \qquad \sigma_v(u,v) = (0,\ 1,\ 1).$$

Proto

$$\begin{aligned} E(u,v) &= \sigma_u(u,v) \cdot \sigma_u(u,v) = 1^2 + 0^2 + 1^2 = 2, \\ F(u,v) &= \sigma_u(u,v) \cdot \sigma_v(u,v) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1, \\ G(u,v) &= \sigma_v(u,v) \cdot \sigma_v(u,v) = 0^2 + 1^2 + 1^2 = 2. \end{aligned}$$

Matice první fundamentální formy je

$$\mathbf{I}(u,v) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Její determinant je

$$\det \mathbf{I}(u,v) = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 3.$$

Obsah plochy je

$$A = \int_0^1 \int_0^2 \sqrt{\det \mathbf{I}(u,v)}\, \mathrm{d}v\, \mathrm{d}u = \int_0^1 \int_0^2 \sqrt{3}\, \mathrm{d}v\, \mathrm{d}u.$$

Tedy

$$A = \sqrt{3} \int_0^1 \int_0^2 1\, \mathrm{d}v\, \mathrm{d}u = \sqrt{3} \int_0^1 2\, \mathrm{d}u = 2\sqrt{3}.$$

Obsah dané části plochy je tedy

$$A = 2\sqrt{3}.$$

Poznamenejme, že se jedná o část roviny. Obsah lze proto spočítat také jako obsah rovnoběžníku určeného vektory

$$\sigma_u = (1,0,1), \qquad \sigma_v = (0,1,1).$$

Platí

$$\sigma_u \times \sigma_v = (-1,-1,1), \qquad \|\sigma_u \times \sigma_v\| = \sqrt{3}.$$

Obsah rovnoběžníku nad jednotkovým čtvercem je tedy $\sqrt{3}$, a nad oblastí Ω dostáváme

$$A = 2\sqrt{3}.$$

Příklad 10 – výpočet obsahu plochy

Určete obsah části plochy

$$\sigma(u,v) = [u,\ v,\ uv]$$

nad oblastí

$$\Omega = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2;\ u \geq 0,\ v \geq 0,\ u^2 + v^2 \leq 1\}.$$

Parciální derivace jsou

$$\sigma_u(u,v) = (1,\ 0,\ v), \qquad \sigma_v(u,v) = (0,\ 1,\ u).$$

Proto

$$\begin{aligned} E(u,v) &= \sigma_u(u,v) \cdot \sigma_u(u,v) = 1 + v^2, \\ F(u,v) &= \sigma_u(u,v) \cdot \sigma_v(u,v) = uv, \\ G(u,v) &= \sigma_v(u,v) \cdot \sigma_v(u,v) = 1 + u^2. \end{aligned}$$

Matice první fundamentální formy je

$$\mathbf{I}(u,v) = \begin{pmatrix} 1 + v^2 & uv \\ uv & 1 + u^2 \end{pmatrix}.$$

Její determinant je

$$\det \mathbf{I}(u,v) = (1 + v^2)(1 + u^2) - u^2 v^2 = 1 + u^2 + v^2.$$

Obsah plochy je

$$A = \iint_\Omega \sqrt{1 + u^2 + v^2}\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v.$$

Přejdeme k polárním souřadnicím

$$u = r\cos\varphi, \qquad v = r\sin\varphi, \qquad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Potom

$$A = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \sqrt{1 + r^2}\, r\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\varphi.$$

Použijeme substituci

$$x = 1 + r^2, \qquad \mathrm{d}x = 2r\, \mathrm{d}r.$$

Dostáváme

$$\int_0^1 r\sqrt{1 + r^2}\, \mathrm{d}r = \frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{x}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \left[x^{3/2}\right]_1^2 = \frac{1}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right).$$

Proto

$$A = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right) \mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{6}\left(2\sqrt{2} - 1\right).$$

Obsah dané části plochy je tedy

$$A = \frac{\pi}{6}\left(2\sqrt{2} - 1\right).$$