

Vybrané příklady z diferenciální geometrie – druhá fundamentální forma

Matice první a druhé fundamentální formy

Uvažujme parametrickou plochu $\sigma : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\sigma(u, v) = [\sigma_1(u, v), \sigma_2(u, v), \sigma_3(u, v)].$$

Nejprve spočítáme parciální derivace parametrizace

$$\sigma_u(u, v), \quad \sigma_v(u, v),$$

a druhé parciální derivace

$$\sigma_{uu}(u, v), \quad \sigma_{uv}(u, v), \quad \sigma_{vv}(u, v).$$

Koeficienty první fundamentální formy jsou funkce

$$E(u, v) = \sigma_u(u, v) \cdot \sigma_u(u, v),$$

$$F(u, v) = \sigma_u(u, v) \cdot \sigma_v(u, v),$$

$$G(u, v) = \sigma_v(u, v) \cdot \sigma_v(u, v).$$

Matice první fundamentální formy je

$$\mathbf{I}(u, v) = \begin{pmatrix} E(u, v) & F(u, v) \\ F(u, v) & G(u, v) \end{pmatrix}.$$

Normálový vektor plochy je

$$\mathbf{n}(u, v) = \frac{\sigma_u(u, v) \times \sigma_v(u, v)}{\|\sigma_u(u, v) \times \sigma_v(u, v)\|}.$$

Koeficienty druhé fundamentální formy jsou funkce

$$e(u, v) = \sigma_{uu}(u, v) \cdot \mathbf{n}(u, v),$$

$$f(u, v) = \sigma_{uv}(u, v) \cdot \mathbf{n}(u, v),$$

$$g(u, v) = \sigma_{vv}(u, v) \cdot \mathbf{n}(u, v).$$

Matice druhé fundamentální formy je

$$\mathbf{II}(u, v) = \begin{pmatrix} e(u, v) & f(u, v) \\ f(u, v) & g(u, v) \end{pmatrix}.$$

Příklad 1 – výpočet matice první a druhé fundamentální formy

Určete matice první a druhé fundamentální formy plochy

$$\sigma(u, v) = [u, v, u^2 + v^2], \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

Parciální derivace parametrizace jsou

$$\sigma_u(u, v) = (1, 0, 2u), \quad \sigma_v(u, v) = (0, 1, 2v).$$

Nejprve určíme koeficienty první fundamentální formy:

$$E(u, v) = \sigma_u \cdot \sigma_u = 1 + 4u^2,$$

$$F(u, v) = \sigma_u \cdot \sigma_v = 4uv,$$

$$G(u, v) = \sigma_v \cdot \sigma_v = 1 + 4v^2.$$

Matice první fundamentální formy je

$$\mathbf{I}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 + 4u^2 & 4uv \\ 4uv & 1 + 4v^2 \end{pmatrix}.$$

Druhé parciální derivace jsou

$$\sigma_{uu}(u, v) = (0, 0, 2), \quad \sigma_{uv}(u, v) = (0, 0, 0), \quad \sigma_{vv}(u, v) = (0, 0, 2).$$

Normálový vektor:

$$\sigma_u(u, v) \times \sigma_v(u, v) = (-2u, -2v, 1).$$

Jednotkový normálový vektor:

$$\mathbf{n}(u, v) = \frac{(-2u, -2v, 1)}{\sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}}.$$

Koeficienty druhé fundamentální formy:

$$e(u, v) = \sigma_{uu} \cdot \mathbf{n} = \frac{2}{\sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}},$$

$$f(u, v) = \sigma_{uv} \cdot \mathbf{n} = 0,$$

$$g(u, v) = \sigma_{vv} \cdot \mathbf{n} = \frac{2}{\sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}}.$$

Matice druhé fundamentální formy je

$$\mathbf{II}(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}} \end{pmatrix}.$$

Matice první a druhé fundamentální formy v bodě

Uvažujme parametrickou plochu $\sigma : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a bod

$$\bar{\mathbf{p}} = [u_0, v_0] \in U, \quad \mathbf{p} = \sigma(\bar{\mathbf{p}}).$$

Nejprve spočítáme parciální derivace parametrizace

$$\sigma_u(u, v), \quad \sigma_v(u, v),$$

a druhé parciální derivace

$$\sigma_{uu}(u, v), \quad \sigma_{uv}(u, v), \quad \sigma_{vv}(u, v).$$

Poté dosadíme bod $\bar{\mathbf{p}} = [u_0, v_0]$. Tím dostaneme číselné vektory

$$\begin{aligned} \sigma_u(\bar{\mathbf{p}}), \quad \sigma_v(\bar{\mathbf{p}}), \\ \sigma_{uu}(\bar{\mathbf{p}}), \quad \sigma_{uv}(\bar{\mathbf{p}}), \quad \sigma_{vv}(\bar{\mathbf{p}}). \end{aligned}$$

Koeficienty první fundamentální formy v bodě $\bar{\mathbf{p}}$ jsou

$$E(\bar{\mathbf{p}}) = \sigma_u(\bar{\mathbf{p}}) \cdot \sigma_u(\bar{\mathbf{p}}),$$

$$F(\bar{\mathbf{p}}) = \sigma_u(\bar{\mathbf{p}}) \cdot \sigma_v(\bar{\mathbf{p}}),$$

$$G(\bar{\mathbf{p}}) = \sigma_v(\bar{\mathbf{p}}) \cdot \sigma_v(\bar{\mathbf{p}}).$$

Matice první fundamentální formy v bodě $\bar{\mathbf{p}}$ je tedy

$$\mathbf{I}(\bar{\mathbf{p}}) = \begin{pmatrix} E(\bar{\mathbf{p}}) & F(\bar{\mathbf{p}}) \\ F(\bar{\mathbf{p}}) & G(\bar{\mathbf{p}}) \end{pmatrix}.$$

Normálový vektor v bodě $\bar{\mathbf{p}}$ určíme jako

$$\mathbf{n}(\bar{\mathbf{p}}) = \frac{\sigma_u(\bar{\mathbf{p}}) \times \sigma_v(\bar{\mathbf{p}})}{\|\sigma_u(\bar{\mathbf{p}}) \times \sigma_v(\bar{\mathbf{p}})\|}.$$

Koeficienty druhé fundamentální formy v bodě $\bar{\mathbf{p}}$ jsou

$$e(\bar{\mathbf{p}}) = \sigma_{uu}(\bar{\mathbf{p}}) \cdot \mathbf{n}(\bar{\mathbf{p}}),$$

$$f(\bar{\mathbf{p}}) = \sigma_{uv}(\bar{\mathbf{p}}) \cdot \mathbf{n}(\bar{\mathbf{p}}),$$

$$g(\bar{\mathbf{p}}) = \sigma_{vv}(\bar{\mathbf{p}}) \cdot \mathbf{n}(\bar{\mathbf{p}}).$$

Matice druhé fundamentální formy v bodě $\bar{\mathbf{p}}$ je

$$\mathbf{II}(\bar{\mathbf{p}}) = \begin{pmatrix} e(\bar{\mathbf{p}}) & f(\bar{\mathbf{p}}) \\ f(\bar{\mathbf{p}}) & g(\bar{\mathbf{p}}) \end{pmatrix}.$$

Příklad 2 – výpočet matice první a druhé fundamentální formy v bodě

Určete matici první a druhé fundamentální formy plochy

$$\sigma(u, v) = [-u - u^2 + v, u + u^2 - v + uv + v^2, u + u^2 + uv + v^2], \quad u, v \in \mathbb{R}$$

v bodě $\bar{\mathbf{p}} = [-1, 1]$.

Parciální derivace parametrizace jsou

$$\sigma_u(u, v) = (-1 - 2u, 1 + 2u + v, 1 + 2u + v), \quad \sigma_v(u, v) = (1, -1 + u + 2v, u + 2v).$$

V bodě $\bar{\mathbf{p}} = [-1, 1]$ dostáváme

$$\sigma_u(\bar{\mathbf{p}}) = (1, 0, 0), \quad \sigma_v(\bar{\mathbf{p}}) = (1, 0, 1).$$

Nejprve určíme koeficienty první fundamentální formy:

$$E(\bar{\mathbf{p}}) = \sigma_u(\bar{\mathbf{p}}) \cdot \sigma_u(\bar{\mathbf{p}}) = (1, 0, 0) \cdot (1, 0, 0) = 1,$$

$$F(\bar{\mathbf{p}}) = \sigma_u(\bar{\mathbf{p}}) \cdot \sigma_v(\bar{\mathbf{p}}) = (1, 0, 0) \cdot (1, 0, 1) = 1,$$

$$G(\bar{\mathbf{p}}) = \sigma_v(\bar{\mathbf{p}}) \cdot \sigma_v(\bar{\mathbf{p}}) = (1, 0, 1) \cdot (1, 0, 1) = 2.$$

Matice první fundamentální formy v bodě $\bar{\mathbf{p}}$ je

$$\mathbf{I}(\bar{\mathbf{p}}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Druhé parciální derivace jsou

$$\sigma_{uu}(u, v) = (-2, 2, 2), \quad \sigma_{uv}(u, v) = (0, 1, 1), \quad \sigma_{vv}(u, v) = (0, 2, 2).$$

Proto

$$\sigma_{uu}(\bar{\mathbf{p}}) = (-2, 2, 2), \quad \sigma_{uv}(\bar{\mathbf{p}}) = (0, 1, 1), \quad \sigma_{vv}(\bar{\mathbf{p}}) = (0, 2, 2).$$

Normálový vektor v bodě $\bar{\mathbf{p}}$ je

$$\mathbf{n}(\bar{\mathbf{p}}) = \frac{\sigma_u(\bar{\mathbf{p}}) \times \sigma_v(\bar{\mathbf{p}})}{\|\sigma_u(\bar{\mathbf{p}}) \times \sigma_v(\bar{\mathbf{p}})\|} = \frac{(1, 0, 0) \times (1, 0, 1)}{\|(1, 0, 0) \times (1, 0, 1)\|} = \frac{(0, -1, 0)}{1} = (0, -1, 0).$$

Koeficienty druhé fundamentální formy:

$$e(\bar{\mathbf{p}}) = \sigma_{uu}(\bar{\mathbf{p}}) \cdot \mathbf{n}(\bar{\mathbf{p}}) = (-2, 2, 2) \cdot (0, -1, 0) = -2,$$

$$f(\bar{\mathbf{p}}) = \sigma_{uv}(\bar{\mathbf{p}}) \cdot \mathbf{n}(\bar{\mathbf{p}}) = (0, 1, 1) \cdot (0, -1, 0) = -1,$$

$$g(\bar{\mathbf{p}}) = \sigma_{vv}(\bar{\mathbf{p}}) \cdot \mathbf{n}(\bar{\mathbf{p}}) = (0, 2, 2) \cdot (0, -1, 0) = -2.$$

Matice druhé fundamentální formy v bodě $\bar{\mathbf{p}}$ je

$$\mathbf{II}(\bar{\mathbf{p}}) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Příklad 3 – výpočet matice první a druhé fundamentální formy v bodě

Určete matici první a druhé fundamentální formy plochy

$$\sigma(u, v) = [-1 + u^2 - uv - v^2, -u + uv, -1 - u - u^2 + v + v^2], \quad u, v \in \mathbb{R}$$

v bodě $\bar{\mathbf{p}} = [0, 0]$.

Parciální derivace parametrizace jsou

$$\sigma_u(u, v) = (2u - v, -1 + v, -1 - 2u), \quad \sigma_v(u, v) = (-u - 2v, u, 1 + 2v).$$

V bodě $\bar{\mathbf{p}} = [0, 0]$ dostáváme

$$\sigma_u(\bar{\mathbf{p}}) = (0, -1, -1), \quad \sigma_v(\bar{\mathbf{p}}) = (0, 0, 1).$$

Nejprve určíme koeficienty první fundamentální formy:

$$E(\bar{\mathbf{p}}) = \sigma_u(\bar{\mathbf{p}}) \cdot \sigma_u(\bar{\mathbf{p}}) = (0, -1, -1) \cdot (0, -1, -1) = 2,$$

$$F(\bar{\mathbf{p}}) = \sigma_u(\bar{\mathbf{p}}) \cdot \sigma_v(\bar{\mathbf{p}}) = (0, -1, -1) \cdot (0, 0, 1) = -1,$$

$$G(\bar{\mathbf{p}}) = \sigma_v(\bar{\mathbf{p}}) \cdot \sigma_v(\bar{\mathbf{p}}) = (0, 0, 1) \cdot (0, 0, 1) = 1.$$

Matice první fundamentální formy v bodě $\bar{\mathbf{p}}$ je

$$\mathbf{I}(\bar{\mathbf{p}}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Druhé parciální derivace jsou

$$\sigma_{uu}(u, v) = (2, 0, -2), \quad \sigma_{uv}(u, v) = (-1, 1, 0), \quad \sigma_{vv}(u, v) = (-2, 0, 2).$$

Proto

$$\sigma_{uu}(\bar{\mathbf{p}}) = (2, 0, -2), \quad \sigma_{uv}(\bar{\mathbf{p}}) = (-1, 1, 0), \quad \sigma_{vv}(\bar{\mathbf{p}}) = (-2, 0, 2).$$

Normálový vektor v bodě $\bar{\mathbf{p}}$ je

$$\mathbf{n}(\bar{\mathbf{p}}) = \frac{\sigma_u(\bar{\mathbf{p}}) \times \sigma_v(\bar{\mathbf{p}})}{\|\sigma_u(\bar{\mathbf{p}}) \times \sigma_v(\bar{\mathbf{p}})\|} = \frac{(0, -1, -1) \times (0, 0, 1)}{\|(0, -1, -1) \times (0, 0, 1)\|} = \frac{(-1, 0, 0)}{1} = (-1, 0, 0).$$

Koeficienty druhé fundamentální formy:

$$e(\bar{\mathbf{p}}) = \sigma_{uu}(\bar{\mathbf{p}}) \cdot \mathbf{n}(\bar{\mathbf{p}}) = (2, 0, -2) \cdot (-1, 0, 0) = -2,$$

$$f(\bar{\mathbf{p}}) = \sigma_{uv}(\bar{\mathbf{p}}) \cdot \mathbf{n}(\bar{\mathbf{p}}) = (-1, 1, 0) \cdot (-1, 0, 0) = 1,$$

$$g(\bar{\mathbf{p}}) = \sigma_{vv}(\bar{\mathbf{p}}) \cdot \mathbf{n}(\bar{\mathbf{p}}) = (-2, 0, 2) \cdot (-1, 0, 0) = 2.$$

Matice druhé fundamentální formy v bodě $\bar{\mathbf{p}}$ je

$$\mathbf{II}(\bar{\mathbf{p}}) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Normálová křivost (ve směru) v bodě

Uvažujme parametrickou plochu $\sigma : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a bod $\bar{\mathbf{p}} = [u_0, v_0] \in U$, $\mathbf{p} = \sigma(\bar{\mathbf{p}})$.

Nechť $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S$ je tečný vektor. Normálová křivost plochy $S = \sigma(U)$ v bodě \mathbf{p} ve směru \mathbf{v} je definována vztahem

$$\kappa_n(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{II}_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}, \mathbf{v})}{\mathbf{I}_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}, \mathbf{v})}.$$

V bázi $\{\sigma_u(\bar{\mathbf{p}}), \sigma_v(\bar{\mathbf{p}})\}$ zapíšeme směr

$$\mathbf{v} = a \sigma_u(\bar{\mathbf{p}}) + b \sigma_v(\bar{\mathbf{p}}),$$

neboli $\bar{\mathbf{v}} = (a, b)$ jsou lokální souřadnice vektoru \mathbf{v} , a platí

$$\kappa_n(\mathbf{v}) = \frac{\bar{\mathbf{v}}^T \mathbf{II}(\bar{\mathbf{p}}) \bar{\mathbf{v}}}{\bar{\mathbf{v}}^T \mathbf{I}(\bar{\mathbf{p}}) \bar{\mathbf{v}}}.$$

kde

$$\mathbf{I}(\bar{\mathbf{p}}) = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \quad \mathbf{II}(\bar{\mathbf{p}}) = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

jsou matice první a druhé fundamentální formy v bodě $\bar{\mathbf{p}}$.

Příklad 2b – výpočet normálové křivosti ve směru v bodě

Určete normálovou křivost plochy

$$\sigma(u, v) = [-u - u^2 + v, u + u^2 - v + uv + v^2, u + u^2 + uv + v^2], \quad u, v \in \mathbb{R}$$

v bodě $\bar{\mathbf{p}} = [-1, 1]$ ve směru vektoru s lokálními souřadnicemi

$$\bar{\mathbf{v}} = (1, -1).$$

Z Příkladu 2 už máme

$$\mathbf{I}(\bar{\mathbf{p}}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{II}(\bar{\mathbf{p}}) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Normálová křivost ve směru $\bar{\mathbf{v}} = (1, -1)$ je dána vztahem

$$\kappa_n(\mathbf{v}) = \frac{\bar{\mathbf{v}}^T \mathbf{II}(\bar{\mathbf{p}}) \bar{\mathbf{v}}}{\bar{\mathbf{v}}^T \mathbf{I}(\bar{\mathbf{p}}) \bar{\mathbf{v}}}.$$

Po dosazení dostáváme

$$\kappa_n(\mathbf{v}) = \frac{(1 \quad -1) \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}{(1 \quad -1) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}.$$

Nyní spočítáme zvlášť čitatele a jmenovatele.

Pro čitatele:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

tedy

$$(1 \quad -1) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -2.$$

Pro jmenovatele:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

tedy

$$(1 \quad -1) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 1.$$

Proto

$$\kappa_n(\mathbf{v}) = \frac{-2}{1} = -2.$$

Příklad 3b – výpočet normálové křivosti ve směru \mathbf{v} bodě

Určete normálovou křivost plochy

$$\sigma(u, v) = [-1 + u^2 - uv - v^2, -u + uv, -1 - u - u^2 + v + v^2], \quad u, v \in \mathbb{R}$$

v bodě $\bar{\mathbf{p}} = [0, 0]$ ve směru vektoru $\bar{\mathbf{v}}$ s lokálními souřadnicemi

$$\bar{\mathbf{v}} = (1, 1).$$

Z Příkladu 3 už máme

$$\mathbf{I}(\bar{\mathbf{p}}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{II}(\bar{\mathbf{p}}) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Normálová křivost ve směru $\bar{\mathbf{v}} = (1, 1)$ je dána vztahem

$$\kappa_n(\mathbf{v}) = \frac{\bar{\mathbf{v}}^\top \mathbf{II}(\bar{\mathbf{p}}) \bar{\mathbf{v}}}{\bar{\mathbf{v}}^\top \mathbf{I}(\bar{\mathbf{p}}) \bar{\mathbf{v}}}.$$

Po dosazení dostáváme

$$\kappa_n(\mathbf{v}) = \frac{(1 \quad 1) \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{(1 \quad 1) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}.$$

Nyní spočítáme zvlášť čitatele a jmenovatele.

Pro čitatele:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

tedy

$$(1 \quad 1) \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 2.$$

Pro jmenovatele:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

tedy

$$(1 \quad 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1.$$

Proto

$$\kappa_n(\mathbf{v}) = \frac{2}{1} = 2.$$

Hlavní křivosti a směry v bodě

Uvažujme parametrickou plochu $\sigma : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a bod $\bar{\mathbf{p}} = [u_0, v_0] \in U$, $\mathbf{p} = \sigma(\bar{\mathbf{p}})$.

Hlavní křivosti κ_1, κ_2 určujeme jako řešení zobecněného vlastního problému

$$(\mathbf{II}(\bar{\mathbf{p}}) - \kappa \mathbf{I}(\bar{\mathbf{p}})) \bar{\mathbf{t}} = \mathbf{0}.$$

Nenulové řešení existuje právě tehdy, když

$$\det(\mathbf{II} - \kappa \mathbf{I}) = \det \begin{pmatrix} e - \kappa E & f - \kappa F \\ f - \kappa F & g - \kappa G \end{pmatrix} = 0.$$

Kořeny této rovnice jsou hlavní křivosti κ_1, κ_2 .

Hlavní směry určujeme pro nalezené hodnoty κ_1, κ_2 řešením soustavy

$$(\mathbf{II} - \kappa_i \mathbf{I}) \bar{\mathbf{t}}_i = \mathbf{0}, \quad i = 1, 2.$$

Po rozepsání:

$$\begin{pmatrix} e - \kappa_i E & f - \kappa_i F \\ f - \kappa_i F & g - \kappa_i G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nenulová řešení $\bar{\mathbf{t}}_i = (a_i, b_i)$ určují hlavní směry v bodě \mathbf{p} :

$$\mathbf{t}_i = \mathbf{J}_\sigma(\bar{\mathbf{p}}) \bar{\mathbf{t}}_i = a_i \sigma_u(\bar{\mathbf{p}}) + b_i \sigma_v(\bar{\mathbf{p}}), \quad i = 1, 2.$$

Příklad 2c – výpočet hlavních křivostí a hlavních směrů v bodě

Určete hlavní křivosti a hlavní směry plochy

$$\sigma(u, v) = [-u - u^2 + v, u + u^2 - v + uv + v^2, u + u^2 + uv + v^2], \quad u, v \in \mathbb{R}$$

v bodě $\bar{\mathbf{p}} = [-1, 1]$.

Z Příkladu 2b máme

$$\mathbf{I}(\bar{\mathbf{p}}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{II}(\bar{\mathbf{p}}) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Hlavní křivosti určujeme jako řešení rovnice

$$\det(\mathbf{II} - \kappa \mathbf{I}) = 0,$$

tedy

$$\det \begin{pmatrix} -2 - \kappa & -1 - \kappa \\ -1 - \kappa & -2 - 2\kappa \end{pmatrix} = 0.$$

Po úpravě dostáváme

$$\kappa^2 + 4\kappa + 3 = 0,$$

odkud

$$\kappa_1 = -1, \quad \kappa_2 = -3.$$

Pro první hlavní křivost $\kappa_1 = -1$ řešíme soustavu

$$(\mathbf{II}(\bar{\mathbf{p}}) - \kappa_1 \mathbf{I}(\bar{\mathbf{p}})) \bar{\mathbf{t}}_1 = \mathbf{0},$$

tedy

$$\left(\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right) \bar{\mathbf{t}}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \bar{\mathbf{t}}_1 = \mathbf{0}.$$

Odtud

$$\bar{\mathbf{t}}_1 = (0, 1).$$

Pro druhou hlavní křivost $\kappa_2 = -3$ řešíme soustavu

$$(\mathbf{II}(\bar{\mathbf{p}}) - \kappa_2 \mathbf{I}(\bar{\mathbf{p}})) \bar{\mathbf{t}}_2 = \mathbf{0},$$

tedy

$$\left(\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right) \bar{\mathbf{t}}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \bar{\mathbf{t}}_2 = \mathbf{0}.$$

Odtud

$$a + 2b = 0,$$

a tedy můžeme zvolit

$$\bar{\mathbf{t}}_2 = (-2, 1).$$

Z Příkladu 2 máme

$$\sigma_u(\bar{\mathbf{p}}) = (1, 0, 0), \quad \sigma_v(\bar{\mathbf{p}}) = (1, 0, 1).$$

Proto hlavní směry v bodě $\bar{\mathbf{p}}$ jsou

$$\mathbf{t}_1 = \mathbf{J}_\sigma(\bar{\mathbf{p}}) \bar{\mathbf{t}}_1 = 0 \sigma_u(\bar{\mathbf{p}}) + 1 \sigma_v(\bar{\mathbf{p}}) = (1, 0, 1),$$

a

$$\mathbf{t}_2 = \mathbf{J}_\sigma(\bar{\mathbf{p}}) \bar{\mathbf{t}}_2 = -2 \sigma_u(\bar{\mathbf{p}}) + 1 \sigma_v(\bar{\mathbf{p}}) = -2(1, 0, 0) + (1, 0, 1) = (-1, 0, 1).$$

Příklad 3c – výpočet hlavních křivostí a hlavních směrů v bodě

Určete hlavní křivosti a hlavní směry plochy

$$\sigma(u, v) = [-1 + u^2 - uv - v^2, -u + uv, -1 - u - u^2 + v + v^2], \quad u, v \in \mathbb{R}$$

v bodě $\bar{\mathbf{p}} = [0, 0]$.

Z Příkladu 3c máme

$$\mathbf{I}(\bar{\mathbf{p}}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{II}(\bar{\mathbf{p}}) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hlavní křivosti určujeme jako řešení rovnice

$$\det(\mathbf{II} - \kappa \mathbf{I}) = 0,$$

tedy

$$\det \begin{pmatrix} -2 - 2\kappa & 1 + \kappa \\ 1 + \kappa & 2 - \kappa \end{pmatrix} = 0.$$

Po úpravě dostáváme

$$\kappa^2 - 4\kappa - 5 = 0,$$

odkud

$$\kappa_1 = 5, \quad \kappa_2 = -1.$$

Pro první hlavní křivost $\kappa_1 = 5$ řešíme soustavu

$$(\mathbf{II}(\bar{\mathbf{p}}) - \kappa_1 \mathbf{I}(\bar{\mathbf{p}})) \bar{\mathbf{t}}_1 = \mathbf{0},$$

tedy

$$\left(\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right) \bar{\mathbf{t}}_1 = \begin{pmatrix} -12 & 6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \bar{\mathbf{t}}_1 = \mathbf{0}.$$

Odtud

$$-12a + 6b = 0,$$

tedy

$$b = 2a.$$

Můžeme zvolit

$$\bar{\mathbf{t}}_1 = (1, 2).$$

Pro druhou hlavní křivost $\kappa_2 = -1$ řešíme soustavu

$$(\mathbf{II}(\bar{\mathbf{p}}) - \kappa_2 \mathbf{I}(\bar{\mathbf{p}})) \bar{\mathbf{t}}_2 = \mathbf{0},$$

tedy

$$\left(\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right) \bar{\mathbf{t}}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \bar{\mathbf{t}}_2 = \mathbf{0}.$$

Odtud

$$b = 0,$$

a můžeme zvolit

$$\bar{\mathbf{t}}_2 = (1, 0).$$

Z Příkladu 3 máme

$$\sigma_u(\bar{\mathbf{p}}) = (0, -1, -1), \quad \sigma_v(\bar{\mathbf{p}}) = (0, 0, 1).$$

Proto hlavní směry v bodě \mathbf{p} jsou

$$\mathbf{t}_1 = \mathbf{J}_\sigma(\bar{\mathbf{p}}) \bar{\mathbf{t}}_1 = 1 \sigma_u(\bar{\mathbf{p}}) + 2 \sigma_v(\bar{\mathbf{p}}) = (0, -1, -1) + 2(0, 0, 1) = (0, -1, 1),$$

a

$$\mathbf{t}_2 = \mathbf{J}_\sigma(\bar{\mathbf{p}}) \bar{\mathbf{t}}_2 = 1 \sigma_u(\bar{\mathbf{p}}) + 0 \sigma_v(\bar{\mathbf{p}}) = (0, -1, -1).$$

Gaussova a střední křivost v bodě

Uvažujme parametrickou plochu $\sigma : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a bod $\bar{\mathbf{p}} = [u_0, v_0] \in U$.

Jsou-li κ_1, κ_2 hlavní křivosti plochy v bodě $\bar{\mathbf{p}}$, pak *Gaussova křivost* a *střední křivost* jsou definovány vztahem

$$K = \kappa_1 \kappa_2, \quad H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}.$$

Současně pro ně platí výpočtové vzorce

$$K = \frac{\det \mathbf{II}(\bar{\mathbf{p}})}{\det \mathbf{I}(\bar{\mathbf{p}})} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2},$$
$$H = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(\mathbf{I}(\bar{\mathbf{p}})^{-1} \mathbf{II}(\bar{\mathbf{p}})) = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)}.$$

Příklad 2d – výpočet Gaussovy a střední křivosti v bodě

Určete Gaussovu a střední křivost plochy

$$\sigma(u, v) = [-u - u^2 + v, u + u^2 - v + uv + v^2, u + u^2 + uv + v^2], \quad u, v \in \mathbb{R}$$

v bodě $\bar{\mathbf{p}} = [-1, 1]$.

Z Příkladu 2c máme hlavní křivosti

$$\kappa_1 = -1, \quad \kappa_2 = -3.$$

Proto

$$K = \kappa_1 \kappa_2 = (-1)(-3) = 3, \quad H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{-1 - 3}{2} = -2.$$

Současně lze použít výpočtové vzorce.

Z Příkladu 2 máme

$$\mathbf{II}(\bar{\mathbf{p}}) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I}(\bar{\mathbf{p}}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$e = -2, \quad f = -1, \quad g = -2, \quad E = 1, \quad F = 1, \quad G = 2.$$

Gaussova křivost:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{(-2)(-2) - (-1)^2}{1 \cdot 2 - 1^2} = \frac{4 - 1}{1} = 3.$$

Střední křivost:

$$H = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)} = \frac{(-2) \cdot 2 - 2(-1) \cdot 1 + (-2) \cdot 1}{2(2 - 1)} = \frac{-4 + 2 - 2}{2} = -2.$$

Příklad 3d – výpočet Gaussovy a střední křivosti v bodě

Určete Gaussovu a střední křivost plochy

$$\sigma(u, v) = [-1 + u^2 - uv - v^2, -u + uv, -1 - u - u^2 + v + v^2], \quad u, v \in \mathbb{R}$$

v bodě $\bar{\mathbf{p}} = [0, 0]$.

Z Příkladu 3c máme hlavní křivosti

$$\kappa_1 = 5, \quad \kappa_2 = -1.$$

Proto

$$K = \kappa_1 \kappa_2 = 5 \cdot (-1) = -5, \quad H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{5 - 1}{2} = 2.$$

Současně lze použít výpočtové vzorce.

Z Příkladu 3 máme

$$\mathbf{II}(\bar{\mathbf{p}}) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I}(\bar{\mathbf{p}}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$e = -2, \quad f = 1, \quad g = 2, \quad E = 2, \quad F = -1, \quad G = 1.$$

Gaussova křivost:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{(-2) \cdot 2 - 1^2}{2 \cdot 1 - (-1)^2} = \frac{-4 - 1}{1} = -5.$$

Střední křivost:

$$H = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)} = \frac{(-2) \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2}{2(2 - 1)} = \frac{-2 + 2 + 4}{2} = 2.$$

Výpočty pomocí Weingartenovo zobrazení

Uvažujme parametrickou plochu $\sigma : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a bod $\bar{\mathbf{p}} = [u_0, v_0] \in U$, $\mathbf{p} = \sigma(\bar{\mathbf{p}})$.

Weingartenovo zobrazení v bodě $\bar{\mathbf{p}}$ je v bázi $\{\sigma_u(\bar{\mathbf{p}}), \sigma_v(\bar{\mathbf{p}})\}$ reprezentováno maticí

$$\mathbf{W}(\bar{\mathbf{p}}) = \mathbf{I}(\bar{\mathbf{p}})^{-1} \mathbf{II}(\bar{\mathbf{p}}),$$

kde

$$\mathbf{I}(\bar{\mathbf{p}}) = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \quad \mathbf{II}(\bar{\mathbf{p}}) = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}.$$

Hlavní křivosti κ_1, κ_2 jsou vlastní čísla matice $\mathbf{W}(\bar{\mathbf{p}})$.

Hlavní směry v lokálních souřadnicích jsou dány vlastními vektory $\bar{\mathbf{t}}_1, \bar{\mathbf{t}}_2$ matice $\mathbf{W}(\bar{\mathbf{p}})$. Odpovídající směry na ploše jsou

$$\mathbf{t}_i = \mathbf{J}_\sigma(\bar{\mathbf{p}}) \bar{\mathbf{t}}_i, \quad i = 1, 2.$$

Gaussova a střední křivost jsou dány vztahy

$$K = \kappa_1 \kappa_2 = \det \mathbf{W}(\bar{\mathbf{p}}), \quad H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \mathbf{W}(\bar{\mathbf{p}}).$$

Příklad 2e – výpočet hlavních křivostí, hlavních směrů, Gaussovy, střední a normálové křivosti

Určete hlavní křivosti, hlavní směry, Gaussovu křivost, střední křivost a normálovou křivost plochy

$$\sigma(u, v) = [-u - u^2 + v, u + u^2 - v + uv + v^2, u + u^2 + uv + v^2], \quad u, v \in \mathbb{R}$$

v bodě $\bar{\mathbf{p}} = [-1, 1]$ ve směru vektoru s lokálními souřadnicemi

$$\bar{\mathbf{v}} = (1, -1).$$

Z předchozích příkladů už máme

$$\mathbf{I}(\bar{\mathbf{p}}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{II}(\bar{\mathbf{p}}) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Nejprve určíme Weingartenovo zobrazení

$$\mathbf{W}(\bar{\mathbf{p}}) = \mathbf{I}(\bar{\mathbf{p}})^{-1} \mathbf{II}(\bar{\mathbf{p}}).$$

Protože

$$\mathbf{I}(\bar{\mathbf{p}})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

dostáváme

$$\mathbf{W}(\bar{\mathbf{p}}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Hlavní křivosti jsou vlastní čísla matice $\mathbf{W}(\bar{\mathbf{p}})$, tedy řešení rovnice

$$\det(\mathbf{W}(\bar{\mathbf{p}}) - \kappa \mathbf{E}) = 0.$$

Platí

$$\det \begin{pmatrix} -3 - \kappa & 0 \\ 1 & -1 - \kappa \end{pmatrix} = (-3 - \kappa)(-1 - \kappa) = 0.$$

Odtud

$$\kappa_1 = -1, \quad \kappa_2 = -3.$$

Pro první hlavní křivost $\kappa_1 = -1$ řešíme soustavu

$$(\mathbf{W}(\bar{\mathbf{p}}) - \kappa_1 \mathbf{E}) \bar{\mathbf{t}}_1 = (\mathbf{W}(\bar{\mathbf{p}}) + \mathbf{E}) \bar{\mathbf{t}}_1 = \mathbf{0},$$

tedy

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \bar{\mathbf{t}}_1 = \mathbf{0}.$$

Odtud můžeme zvolit

$$\bar{\mathbf{t}}_1 = (0, 1).$$

Pro druhou hlavní křivost $\kappa_2 = -3$ řešíme soustavu

$$(\mathbf{W}(\bar{\mathbf{p}}) - \kappa_2 \mathbf{E}) \bar{\mathbf{t}}_2 = (\mathbf{W}(\bar{\mathbf{p}}) + 3\mathbf{E}) \bar{\mathbf{t}}_2 = \mathbf{0},$$

tedy

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \bar{\mathbf{t}}_2 = \mathbf{0}.$$

Odtud

$$a + 2b = 0,$$

a můžeme zvolit

$$\bar{\mathbf{t}}_2 = (-2, 1).$$

Z Příkladu 2 dále víme, že

$$\sigma_u(\bar{\mathbf{p}}) = (1, 0, 0), \quad \sigma_v(\bar{\mathbf{p}}) = (1, 0, 1).$$

Proto hlavní směry na ploše jsou

$$\mathbf{t}_1 = \mathbf{J}_\sigma(\bar{\mathbf{p}}) \bar{\mathbf{t}}_1 = 0 \sigma_u(\bar{\mathbf{p}}) + 1 \sigma_v(\bar{\mathbf{p}}) = (1, 0, 1),$$

a

$$\mathbf{t}_2 = \mathbf{J}_\sigma(\bar{\mathbf{p}}) \bar{\mathbf{t}}_2 = -2 \sigma_u(\bar{\mathbf{p}}) + 1 \sigma_v(\bar{\mathbf{p}}) = -2(1, 0, 0) + (1, 0, 1) = (-1, 0, 1).$$

Gaussova křivost je

$$K = \kappa_1 \kappa_2 = (-1)(-3) = 3.$$

Střední křivost je

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{-1 - 3}{2} = -2.$$

Normálová křivost ve směru $\bar{\mathbf{v}} = (1, -1)$ je

$$\kappa_n(\mathbf{v}) = \frac{\bar{\mathbf{v}}^\top \mathbf{II}(\bar{\mathbf{p}}) \bar{\mathbf{v}}}{\bar{\mathbf{v}}^\top \mathbf{I}(\bar{\mathbf{p}}) \bar{\mathbf{v}}} = \frac{(1 \quad -1) \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}{(1 \quad -1) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}} = \frac{-2}{1} = -2.$$

Příklad 3e – výpočet hlavních křivostí, hlavních směrů, Gaussovy, střední a normálové křivosti

Určete hlavní křivosti, hlavní směry, Gaussovu křivost, střední křivost a normálovou křivost plochy

$$\sigma(u, v) = [-1 + u^2 - uv - v^2, -u + uv, -1 - u - u^2 + v + v^2], \quad u, v \in \mathbb{R}$$

v bodě $\bar{\mathbf{p}} = [0, 0]$ ve směru vektoru s lokálními souřadnicemi

$$\bar{\mathbf{v}} = (1, 1).$$

Z předchozích příkladů už máme

$$\mathbf{I}(\bar{\mathbf{p}}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{II}(\bar{\mathbf{p}}) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nejprve určíme Weingartenovo zobrazení

$$\mathbf{W}(\bar{\mathbf{p}}) = \mathbf{I}(\bar{\mathbf{p}})^{-1} \mathbf{II}(\bar{\mathbf{p}}).$$

Protože

$$\mathbf{I}(\bar{\mathbf{p}})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

dostáváme

$$\mathbf{W}(\bar{\mathbf{p}}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Hlavní křivosti jsou vlastní čísla matice $\mathbf{W}(\bar{\mathbf{p}})$, tedy řešení rovnice

$$\det(\mathbf{W}(\bar{\mathbf{p}}) - \kappa \mathbf{E}) = 0.$$

Platí

$$\det \begin{pmatrix} -1 - \kappa & 3 \\ 0 & 5 - \kappa \end{pmatrix} = (-1 - \kappa)(5 - \kappa) = 0.$$

Odtud

$$\kappa_1 = 5, \quad \kappa_2 = -1.$$

Pro první hlavní křivost $\kappa_1 = 5$ řešíme soustavu

$$(\mathbf{W}(\bar{\mathbf{p}}) - \kappa_1 \mathbf{E}) \bar{\mathbf{t}}_1 = \mathbf{0},$$

tedy

$$\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \bar{\mathbf{t}}_1 = \mathbf{0}.$$

Odtud

$$-6a + 3b = 0,$$

a můžeme zvolit

$$\bar{\mathbf{t}}_1 = (1, 2).$$

Pro druhou hlavní křivost $\kappa_2 = -1$ řešíme soustavu

$$(\mathbf{W}(\bar{\mathbf{p}}) - \kappa_2 \mathbf{E}) \bar{\mathbf{t}}_2 = (\mathbf{W}(\bar{\mathbf{p}}) + \mathbf{E}) \bar{\mathbf{t}}_2 = \mathbf{0},$$

tedy

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \bar{\mathbf{t}}_2 = \mathbf{0}.$$

Odtud

$$b = 0,$$

a můžeme zvolit

$$\bar{\mathbf{t}}_2 = (1, 0).$$

Z Příkladu 3 dále víme, že

$$\sigma_u(\bar{\mathbf{p}}) = (0, -1, -1), \quad \sigma_v(\bar{\mathbf{p}}) = (0, 0, 1).$$

Proto hlavní směry na ploše jsou

$$\mathbf{t}_1 = \mathbf{J}_\sigma(\bar{\mathbf{p}}) \bar{\mathbf{t}}_1 = 1 \sigma_u(\bar{\mathbf{p}}) + 2 \sigma_v(\bar{\mathbf{p}}) = (0, -1, -1) + 2(0, 0, 1) = (0, -1, 1),$$

a

$$\mathbf{t}_2 = \mathbf{J}_\sigma(\bar{\mathbf{p}}) \bar{\mathbf{t}}_2 = 1 \sigma_u(\bar{\mathbf{p}}) + 0 \sigma_v(\bar{\mathbf{p}}) = (0, -1, -1).$$

Gaussova křivost je

$$K = \kappa_1 \kappa_2 = 5 \cdot (-1) = -5.$$

Střední křivost je

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{5 - 1}{2} = 2.$$

Normálová křivost ve směru $\bar{\mathbf{v}} = (1, 1)$ je

$$\kappa_n(\mathbf{v}) = \frac{\bar{\mathbf{v}}^\top \mathbf{II}(\bar{\mathbf{p}}) \bar{\mathbf{v}}}{\bar{\mathbf{v}}^\top \mathbf{I}(\bar{\mathbf{p}}) \bar{\mathbf{v}}} = \frac{(1 \ 1) \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{(1 \ 1) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \frac{2}{1} = 2.$$