LINEÁRNÍ VEKTOROVÝ PROSTOR

Definice *Neprázdná množina $\mathcal{L}$ se nazývá lineární vektorový prostor, jestliže platí:*

1. $\forall u, v \in \mathcal{L}$ *existuje jednoznačně určený prvek* $u + v \in \mathcal{L}$ *nazývaný součet prvků* u *a* v.
2. $\forall u \in \mathcal{L}$, $\forall \lambda$ *číslo existuje jednoznačně určený prvek* $\lambda u \in \mathcal{L}$ *nazývaný násobek prvku* u *číslem* λ.
3. $u + v = v + u \quad \forall u, v \in \mathcal{L}$.
4. $(u + v) + w = u + (v + w) \quad \forall u, v, w \in \mathcal{L}$.
5. $\exists\ 0 \in \mathcal{L}$ *tak, že* $\forall u \in \mathcal{L}$ *platí* $u + 0 = 0 + u = u$.
6. $\forall u \in \mathcal{L} \quad \exists -u \in \mathcal{L}$ *tak, že* $u + (-u) = (-u) + u = 0$.
7. $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v \quad \forall u, v \in \mathcal{L}$, $\forall \lambda$ *číslo.*
8. $(\lambda + \alpha)u = \lambda u + \alpha u \quad \forall u \in \mathcal{L}$, $\forall \lambda, \alpha$ *čísla.*
9. $(\lambda\alpha)u = \lambda(\alpha u) \quad \forall u \in \mathcal{L}$, $\forall \lambda, \alpha$ *číslo.*
10. $1u = u \quad \forall u \in \mathcal{L}$.

Věta *Nechť $\mathcal{L}$ je lineární vektorový prostor. Potom platí:*

1. *Nulový prvek je určen jednoznačně.*
2. *Jestliže* $x + y = x + z$, *potom* $y = z$.
3. *Ke každému prvku* $x \in \mathcal{L}$ *je opačný prvek určen jednoznačně.*
4. *Jestliže* $x + y = z$, *potom* $x = z + (-y)$.
5. $0x = 0 \quad \forall x \in \mathcal{L}$,
   $\lambda 0 = 0 \quad \forall \lambda$ *číslo.*
6. $(-1)x = -x \quad \forall x \in \mathcal{L}$.
7. *Jestliže* $\lambda x = 0$, *potom buď* $\lambda = 0$ *nebo* $x = 0$.

Definice *Nechť $\mathcal{L}$ je lineární vektorový prostor , nechť $v_1, v_2, ..., v_n \in \mathcal{L}$, nechť $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ jsou čísla. Prvek $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n \in \mathcal{L}$ se nazývá* **lineární kombinace** *prvků $v_1, v_2, ..., v_n$ s koeficienty $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$. Lineární kombinace $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots \lambda_n v_n$ se nazývá* **netriviální***, jestliže existuje $i \in \{1, 2, ..., n\}$ takové, že $\lambda_i \neq 0$. Lineární kombinace $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots \lambda_n v_n$ se nazývá* **triviální***, jestliže $\lambda_i = 0$ pro každé $i = 1, 2, ..., n$.*
Prvky $v_1, v_2, ..., v_n$ se nazývají **lineárně nezávislé***, jestliže každá jejich netriviální lineární kombinace je nenulový prvek. Prvky $v_1, v_2, ..., v_n$ se nazývají* **lineárně závislé***, jestliže nejsou lineárně nezávislé, t.j. jestliže existuje jejich netriviální lineární kombinace, která se rovná nulovému prvku.*

Věta *Nechť $\mathcal{L}$ je lineární vektorový prostor, nechť $v_1, v_2, ..., v_n \in \mathcal{L}$ jsou prvky tohoto prostoru. Tyto prvky jsou lineárně závislé právě tehdy, když alespoň jeden z nich se dá vyjádřit jako lineární kombinace ostatních.*

Každá podmnožina lineárně nezávislé množiny je opět lineárně nezávislá.

Definice *Řekneme, že neprázdná podmnožina $\mathcal{L}'$ lineárního vektorového prostoru $\mathcal{L}$ je* **podprostor** *prostoru $\mathcal{L}$, jestliže platí:*
$x + y \in \mathcal{L}' \quad \forall x, y \in \mathcal{L}'$,
$\lambda x \in \mathcal{L}' \quad \forall x \in \mathcal{L}'$, $\forall \lambda$ *číslo.*

Věta *Jestliže $M = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ je podmnožina lineárního vektorového prostoru $\mathcal{L}$, potom množina všech lineárních kombinací prvků $u_1, u_2, ..., u_n$ se nazývá lineární obal množiny M a značí $\langle M \rangle = \{\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n : \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \text{ čísla}\}$*

Pro každou neprázdnou konečnou množinu $M \subseteq \mathcal{L}$ je $\langle M \rangle$ podprostor prostoru $\mathcal{L}$.

Definice *Říkáme, že množina M* **generuje** *lineární vektorový prostor $\mathcal{L}$ (je množinou generátorů, je generující množinou), jestliže $\mathcal{L} = \langle M \rangle$, t.j. každý prvek prostoru $\mathcal{L}$ lze psát jako lineární kombinaci prvků množiny M.*
Existuje-li konečná generující množina M prostoru $\mathcal{L}$, říkáme, že prostor $\mathcal{L}$ je **konečně generovaný**.

Definice *Nechť $\mathcal{L}$ je konečně generovaný lineární vektorový prostor. Lineárně nezávislá, generující množina prostoru $\mathcal{L}$ se nazývá* **báze prostoru** $\mathcal{L}$.

Věta *V každém nenulovém, konečně generovaném lineárním vektorovém prostoru existuje báze.*

Věta *(Steinitz)*
Nechť $\mathcal{L}$ je nenulový lineární vektorový prostor, nechť $M = \{g_1, g_2, ..., g_m\}$ je množina generátorů prostoru $\mathcal{L}$, nechť $N = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ je množina lineárně nezávislých prvků prostoru $\mathcal{L}$. Potom $n \leq m$ a některých n prvků množiny M lze nahradit prvky množiny N tak, že vzniklá množina opět generuje prostor $\mathcal{L}$.

Důsledky

1. Jestliže množina $\{g_1, g_2, ..., g_m\}$ generuje prostor $\mathcal{L}$, pak každá lineárně nezávislá množina v $\mathcal{L}$ má maximálně m prvků.
2. Každou lineárně nezávislou množinu v prostoru $\mathcal{L}$ lze doplnit do báze prostoru $\mathcal{L}$.
3. Každé dvě báze nenulového, konečně generovaného lineárního vektorového prostoru mají stejný počet prvků.

Definice *Počet prvků báze konečně generovaného lineárního vektorového prostoru se nazývá* **dimenze prostoru** $\mathcal{L}$ *a značí* $\dim \mathcal{L}$.

4. Nechť $g_1, g_2, ..., g_n$ je n lineárně nezávislých prvků lineárního vektorového prostoru $\mathcal{L}$, nechť $\dim \mathcal{L} = n$. Potom $g_1, g_2, ..., g_n$ je báze prostoru $\mathcal{L}$.

Věta *Každý prvek lineárního vektorového prostoru $\mathcal{L}$ lze jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinaci prvků báze.*

Definice *Nechť $\mathcal{L}$ je nenulový, konečně generovaný lineární vektorový prostor, nechť $b_1, b_2, ..., b_n$ je báze prostoru $\mathcal{L}$. Je-li $x \in \mathcal{L}$ libovolný prvek, potom jednoznačně určené koeficienty $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ v lineární kombinaci $x = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \cdots + \lambda_n b_n$ budeme nazývat* **souřadnice** *prvku x v bázi $b_1, b_2, ..., b_n$. Píšeme $\widehat{x} = [\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n]^T$.*

HODNOST MATICE

Definice *Nechť* $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ *je matice typu* m/n*. Množina všech lineárních kombinací řádků (resp. sloupců) matice* $\mathbf{A}$ *je lineární vektorový prostor, který nazýváme* **řádkový (resp. sloupcový) prostor matice A**.
Dimenze řádkového (resp. sloupcového) prostoru matice $\mathbf{A}$ *se nazývá* **řádková (resp. sloupcová) hodnost matice A** *a značí* $\mathrm{h}^r(\mathbf{A})$ *(resp.* $\mathrm{h}^s(\mathbf{A})$.

Věta *Pro každou matici* $\mathbf{A}$ *platí* $\mathrm{h}^r(\mathbf{A}) = \mathrm{h}^s(\mathbf{A})$.

Definice *Hodnost matice* $\mathbf{A}$ *se rovná řádkové nebo sloupcové hodnosti matice* $\mathbf{A}$.
Píšeme $\mathrm{h}(\mathbf{A}) = \mathrm{h}^r(\mathbf{A}) = \mathrm{h}^s(\mathbf{A})$.

Definice *Řekneme, že matice* $\mathbf{A}$ *je ve* **stupňovitém tvaru**, *jestliže platí:*
je-li v některém řádku i*-tý prvek první nenulový, potom ve všech dalších řádkách jsou všechny prvky od 1. až do* i*-tého včetně rovny* 0.

Matici lze pomocí řádkových elementárních úprav převést na matici ve stupňovitém tvaru.

Věta *Hodnost matice ve stupňovitém tvaru je rovna počtu nenulových řádků matice.*

Věta *Elementární řádkové úpravy matice nemění hodnost matice.*

Definice *Nechť* $\mathbf{A}$ *je matice typu* m/n*. Pro libovolné* $r \leq \min\{m, n\}$*, pro libovolnou volbu* $1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_r \leq m$ *a* $1 \leq l_1 < l_2 < \cdots < l_r \leq n$ *budeme determinant matice* $\mathbf{A}(k_1, k_2, ..., k_r/l_1, l_2, ..., l_r)$ *nazývat* **minor řádu** r.

Věta *Nechť* $\mathbf{A}$ *je matice typu* m/n*. Řádková hodnost matice* $\mathbf{A}$ *je rovna* k *právě tehdy, když existuje nenulový minor řádu* k *a všechny minory vyšších řádů jsou rovny nule.*

Důsledek Pro libovolnou matici $\mathbf{A}$ je $\mathrm{h}^r(\mathbf{A}) = \mathrm{h}^r(\mathbf{A}^T)$, a tím také $\mathrm{h}^r(\mathbf{A}) = \mathrm{h}^s(\mathbf{A})$.

Důsledek Jestliže $\mathbf{A}$ je čtvercová matice řádu n, potom $\mathrm{h}(\mathbf{A}) = n$ právě tehdy, když $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Definice *Čtvercová matice se nazývá* **regulární**, *jestliže se její hodnost rovná řádu matice. Čtvercová matice se nazývá* **singulární**, *jestliže se její hodnost nerovná řádu matice.*

Regulární matici lze pomocí řádkových elementárních úprav převést na matici jednotkovou. Regulární matici lze pomocí sloupcových elementárních úprav převést na jednotkovou matici.

Definice *Matice, která vznikne z jednotkové matice provedením jedné řádkové (resp. sloupcové) elementární úpravy, se nazývá* **řádková** *(resp.* **sloupcová***)* **elementární** *matice.*

Provádět řádkovou elementární úpravu matice je totéž jako násobit matici zleva vhodnou řádkovou elementární maticí. Totéž platí pro sloupcové elementární úpravy a násobení zprava vhodnou sloupcovou elementární maticí.

Poznámka Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice řádu n, nechť $\mathbf{T}$ je řádková elementární matice řádu n. Potom $\quad \det \mathbf{TA} = \det \mathbf{T} \cdot \det \mathbf{A}$.

Věta *Nechť existuje součin* $\mathbf{AB}$ *matic* $\mathbf{A},\ \mathbf{B}$. *Potom* $\quad \mathrm{h}(\mathbf{AB}) \leq \min\{\mathrm{h}(\mathbf{A}), \mathrm{h}(\mathbf{B})\}$.

INVERZNÍ MATICE

Definice *Jestliže* $\mathbf{A}$ *je čtvercová matice řádu* n*, potom čtvercová matice* $\mathbf{A}^{-1}$ *řádu* n *se nazývá* **inverzní matice** *k matici* $\mathbf{A}$*, jestliže* $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

Věta *Ke čtvercové matici existuje nejvýše jedna inverzní matice.*

Věta *Nechť* $\mathbf{A}$ *je čtvercová matice řádu* n*. Potom k matici* $\mathbf{A}$ *existuje inverzní matice* $\mathbf{A}^{-1}$ *právě tehdy, když matice* $\mathbf{A}$ *je regulární.*

Užití

Jestliže $\mathbf{A}$ je regulární matice, potom ty řádkové elementární úpravy, které převedou matici $\mathbf{A}$ na matici jednotkovou, ty stejné řádkové elementární úpravy převedou matici jednotkovou na matici $\mathbf{A}^{-1}$.

Zapíšeme-li vedle sebe matici $\mathbf{A}$ a jednotkovou matici $\mathbf{I}$, a budeme-li provádět na obě matice stejné řádkové elementární úpravy tak dlouho, až z matice $\mathbf{A}$ vznikne matice jednotková, potom z jednotkové matice $\mathbf{I}$ musíme získat matici $\mathbf{A}^{-1}$. Symbolicky zapsáno

$$[\mathbf{A}|\mathbf{I}] \sim \cdots \sim \left[\mathbf{I}|\mathbf{A}^{-1}\right].$$

Důsledek Ke každé elementární matici existuje inverzní matice a je to opět elementární matice.

Nyní lze dokázat větu:

Věta *Nechť* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *jsou matice řádu* n*. Potom*

$$\det \mathbf{AB} = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}.$$

Definice *Ke čtvercové matici* $\mathbf{A}$ *řádu* n *se matice* $\mathbf{A}^A$*, kterou vytvoříme tím, že transponovaně skládáme algebraické doplňky matice* $\mathbf{A}$*, nazývá* **matice adjungovaná** *k matici* $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{A}^A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Věta *Je-li čtvercová matice* $\mathbf{A}$ *řádu* n *regulární, potom* $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{\det \mathbf{A}}\mathbf{A}^A$.

LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ

Definice *Nechť $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ jsou lineární vektorové prostory, nechť $\mathbf{L}:\mathcal{U}\longrightarrow\mathcal{V}$ je zobrazení z množiny $\mathcal{U}$ do množiny $\mathcal{V}$. Zobrazení $\mathbf{L}$ se nazývá* **lineární**, *jestliže pro každé $x, y \in \mathcal{U}$ a pro každé číslo λ platí:*

$\mathbf{L}(x+y) = \mathbf{L}(x) + \mathbf{L}(y)$,

$\mathbf{L}(\lambda x) = \lambda\mathbf{L}(x)$.

Poznámka Pro každé lineární zobrazení $\mathbf{L}:\mathcal{U}\longrightarrow\mathcal{V}$ platí $\mathbf{L}(0) = 0$.

Definice *Nechť $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ jsou lineární vektorové prostory, nechť $\mathbf{L}:\mathcal{U}\longrightarrow\mathcal{V}$ je lineární zobrazení. Množina všech prvků prostoru $\mathcal{U}$, které se zobrazí do prvku 0, se nazývá* **jádro zobrazení L** *a značí* $\mathrm{Ker}\mathbf{L}$. $\mathrm{Ker}\mathbf{L} = \{x \in \mathcal{U} : \mathbf{L}(x) = 0\}$.
Množina obrazů všech prvků prostoru $\mathcal{U}$ se nazývá **obraz zobrazení L** *a značí* $\mathrm{Im}\mathbf{L}$. $\mathrm{Im}\mathbf{L} = \{y \in \mathcal{V} : \exists x \in \mathcal{U}\ \mathbf{L}(x) = y\}$.

Věta *Nechť $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ jsou lineární vektorové prostory, $\mathbf{L}:\mathcal{U}\longrightarrow\mathcal{V}$ je lineární zobrazení. Potom $\mathrm{Ker}\mathbf{L}$ je podprostor prostoru $\mathcal{U}$, $\mathrm{Im}\mathbf{L}$ je podprostor prostoru $\mathcal{V}$ a platí*

$$\dim(\mathrm{Ker}\mathbf{L}) + \dim(\mathrm{Im}\mathbf{L}) = \dim\mathcal{U}.$$

Definice *Nechť $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ jsou lineární vektorové prostory, nechť $\mathbf{L}:\mathcal{U}\longrightarrow\mathcal{V}$ je lineární zobrazení. Zobrazení $\mathbf{L}$ se nazývá* **izomorfismus**, *je-li prosté a na prostor, t.j. pro každé $x, y \in \mathcal{U}$, $x \neq y$ je $\mathbf{L}(x) \neq \mathbf{L}(y)$ a pro každé $y \in \mathcal{V}$ existuje $x \in \mathcal{U}$ tak, že $\mathbf{L}(x) = y$. Prostory $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ se nazývají* **izomorfní**, *jestliže existuje izomorfismus $\mathbf{L}:\mathcal{U}\longrightarrow\mathcal{V}$.*

Věta *Nechť $\mathbf{L}:\mathcal{U}\longrightarrow\mathcal{V}$ je lineární zobrazení. Potom zobrazení $\mathbf{L}$ je izomorfismus právě tehdy, když $\mathrm{Ker}\mathbf{L} = 0$ a $\mathrm{Im}\mathbf{L} = \mathcal{V}$.*

Věta *Jestliže $\mathbf{L}:\mathcal{U}\longrightarrow\mathcal{V}$ je izomorfismus, potom existuje inverzní zobrazení $\mathbf{L}^{-1}:\mathcal{V}\longrightarrow\mathcal{U}$, které je také izomorfismus.*

Věta *Jestliže $\mathbf{L}:\mathcal{U}\longrightarrow\mathcal{V}$ je izomorfismus, potom prvky $x_1, x_2, ..., x_k \in \mathcal{U}$ jsou lineárně závislé právě tehdy, když prvky $\mathbf{L}(x_1), \mathbf{L}(x_2), ..., \mathbf{L}(x_k) \in \mathcal{V}$ jsou také lineárně závislé.*

Věta *Prostory $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ jsou izomorfní právě tehdy, když $\dim\mathcal{U} = \dim\mathcal{V}$.*

Jestliže $\mathcal{U}$ je lineární vektorový prostor, $\dim\mathcal{U} = k$, zvolme $u_1, u_2, ..., u_k$ bázi prostoru $\mathcal{U}$. Pro každý prvek $x \in \mathcal{U}$ je $x = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_k u_k$. $\widehat{x} = [\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k]^T$ jsou souřadnice prvku x v bázi $u_1, u_2, ..., u_k$. Definujme zobrazení $\mathbf{L}:\mathcal{U}\longrightarrow\mathbb{R}_n$ předpisem $\mathbf{L}(x) = \widehat{x}$. Toto zobrazení je izomorfismus, který se nazývá **souřadnicový izomorfismus**.

Matice lineárního zobrazení

Nechť $\mathbf{L}: \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ je lineární zobrazení. Buď $u_1, u_2, ..., u_k$ báze prostoru $\mathcal{U}$, $\dim \mathcal{U} = k$, $v_1, v_2, ..., v_n$ báze prostoru $\mathcal{V}$, $\dim \mathcal{V} = n$. Pro libovolný prvek $x \in \mathcal{U}$ je $y = \mathbf{L}(x)$, kde $y \in \mathcal{V}$.
Vyjádříme $x = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_k u_k$, $\widehat{x} = [\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k]^T$ $y = \eta_1 v_1 + \eta_2 v_2 + \cdots + \eta_n v_n$, $\widehat{y} = [\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n]^T$.
$y = \mathbf{L}(x) = \mathbf{L}(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_k u_k) = \lambda_1 \mathbf{L}(u_1) + \lambda_2 \mathbf{L}(u_2) + \cdots + \lambda_k \mathbf{L}(u_k)$
$\widehat{y} = \lambda_1 \widehat{\mathbf{L}(u_1)} + \lambda_2 \widehat{\mathbf{L}(u_2)} + \cdots + \lambda_k \widehat{\mathbf{L}(u_k)}$. Označme pro každé $i = 1, ..., k$ $\widehat{\mathbf{L}(u_i)} = [\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, ..., \alpha_{ni}]^T$, kde $\mathbf{L}(u_i) = \alpha_{1i} v_1 + \alpha_{2i} v_2 + \cdots + \alpha_{ni} v_n$.

$$\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \vdots \\ \alpha_{n2} \end{bmatrix} + \cdots + \lambda_k \begin{bmatrix} \alpha_{1k} \\ \alpha_{2k} \\ \vdots \\ \alpha_{nk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1k} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2k} \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{bmatrix} = \mathbf{A}\widehat{x},$$

Matice $\mathbf{A}$ se nazývá **matice lineárního zobrazení** $\mathbf{L}$ v bázích $u_1, u_2, ..., u_k$ prostoru $\mathcal{U}$ a $v_1, v_2, ..., v_n$ prostoru $\mathcal{V}$.

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{L}(u_1)} & \widehat{\mathbf{L}(u_2)} & \cdots & \widehat{\mathbf{L}(u_k)} \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}\widehat{x} = \widehat{y}$, pro každé $x \in \mathcal{U}$, $\mathbf{L}(x) = y$.

Věta *Nechť $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ jsou lineární vektorové prostory konečné dimenze, nechť $\mathbf{L}: \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ je lineární zobrazení, nechť $u_1, u_2, ..., u_k$ je báze prostoru $\mathcal{U}$, tedy $\dim \mathcal{U} = k$, nechť $v_1, v_2, ..., v_n$ je báze prostoru $\mathcal{V}$, tedy $\dim \mathcal{V} = n$. Utvořme právě popsaným způsobem matici lineárního zobrazení $\mathbf{A}$ typu n/k, t.j. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{L}(u_1)} & \widehat{\mathbf{L}(u_2)} & \cdots & \widehat{\mathbf{L}(u_k)} \end{bmatrix}$. Potom pro každé $x \in \mathcal{U}$ takové, že $\mathbf{L}(x) = y$, je $\mathbf{A}\widehat{x} = \widehat{y}$.*

Věta *Nechť $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ jsou lineární vektorové prostory, nechť $\mathbf{L}: \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ je lineární zobrazení. Jestliže báze prostoru $\mathcal{U}$ je $u_1, u_2, ..., u_k$, báze prostoru $\mathcal{V}$ je $v_1, v_2, ..., v_n$ a $\mathbf{A}$ je matice lineárního zobrazení $\mathbf{L}$ v těchto bázích, potom $\dim(\mathrm{Im}\mathbf{L}) = \mathrm{h}(\mathbf{A})$.*

Důsledek Nechť $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ jsou lineární vektorové prostory konečné dimenze, nechť $\mathbf{L}: \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ je izomorfismus. Je-li $\mathbf{A}$ matice izomorfismu $\mathbf{L}$ v daných bázích, potom matice $\mathbf{A}$ je regulární.

Věta *Nechť $\mathbf{L}_1: \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$, $\mathbf{L}_2: \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ jsou lineární zobrazení. Jestliže $\mathbf{A}$ je matice lineárního zobrazení $\mathbf{L}_1$ a $\mathbf{B}$ je matice lineárního zobrazení $\mathbf{L}_2$ v daných bázích, potom složené zobrazení $\mathbf{L}: \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{W}$ dané předpisem $\mathbf{L}(x) = \mathbf{L}_2(\mathbf{L}_1(x))$ pro každé $x \in \mathcal{U}$ je opět lineární a matice složeného zobrazení $\mathbf{L}$ v daných bázích je $\mathbf{C} = \mathbf{BA}$.*

Nyní lze dokázat větu:

Věta *Nechť $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ jsou matice takové, že existuje součin $\mathbf{AB}$. Potom*

$$\mathrm{h}(\mathbf{AB}) \leq \min\{\mathrm{h}(\mathbf{A}), \mathrm{h}(\mathbf{B})\}.$$

Důsledek Nechť $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ jsou lineární vektorové prostory konečné dimenze, nechť $\mathbf{L}: \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ je izomorfismus. Je-li $u_1, u_2, ..., u_n$ báze prostoru $\mathcal{U}$, $v_1, v_2, ..., v_n$ báze prostoru $\mathcal{V}$ a $\mathbf{A}$ matice izomorfismu $\mathbf{L}$ v daných bázích, potom inverzní zobrazení $\mathbf{L}^{-1}: \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{U}$ má v těchto bázích matici $\mathbf{A}^{-1}$.

Matice přechodu

Jestliže $f_1, f_2, ..., f_n$ je báze prostoru $\mathcal{U}$ a $g_1, g_2, ..., g_n$ je také báze prostoru $\mathcal{U}$, pak pro libovolný prvek $x \in \mathcal{U}$ lze napsat jeho souřadnice v obou bázích.

$x = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_n f_n, \quad \widehat{x} = [\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n]^T$

$x = \eta_1 g_1 + \eta_2 g_2 + \cdots + \eta_n g_n, \quad \widetilde{x} = [\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n]^T.$

Buď $\mathbf{L}: \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}$ identické zobrazení, $\mathbf{L}(x) = x$ pro každé $x \in \mathcal{U}$. Označme $\mathbf{T}$ matici tohoto lineárního zobrazení, v bázi $g_1, g_2, ..., g_n$ a v bázi $f_1, f_2, ..., f_n$ prostoru $\mathcal{U}$.

$\mathbf{T} = \left[\begin{array}{cccc} \widehat{\mathbf{L}(g_1)} & \widehat{\mathbf{L}(g_2)} & \cdots & \widehat{\mathbf{L}(g_n)} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc} \widehat{g_1} & \widehat{g_2} & \cdots & \widehat{g_n} \end{array} \right],$

neboť $\mathbf{L}(x) = x$ pro každé $x \in \mathcal{U}$. Pro každé $x \in \mathcal{U}$ platí $\mathbf{T}\widetilde{x} = \widehat{\mathbf{L}(x)} = \widehat{x}$ a matice $\mathbf{T}$ je regulární. Takto vytvořená matice $\mathbf{T}$ se nazývá **matice přechodu** od báze $f_1, f_2, ..., f_n$ k bázi $g_1, g_2, ..., g_n$ prostoru $\mathcal{U}$.

Věta *Nechť $\mathcal{U}$ je lineární vektorový prostor dimenze n, nechť $f_1, f_2, ..., f_n$, $g_1, g_2, ..., g_n$ jsou dvě báze prostoru $\mathcal{U}$. Pro libovolný prvek $x \in \mathcal{U}$ označme $\widehat{x}$ souřadnice prvku x v bázi $f_1, f_2, ..., f_n$ a $\tilde{x}$ souřadnice prvku x v bázi $g_1, g_2, ..., g_n$. Označíme-li $\mathbf{T}$ matici přechodu od báze $f_1, f_2, ..., f_n$ k bázi $g_1, g_2, ..., g_n$, potom platí:*

1. $\mathbf{T}$ *je regulární matice,*
2. $\mathbf{T}\widetilde{x} = \widehat{x}$ *pro každé* $x \in \mathcal{U}$,
3. $\mathbf{T}^{-1}$ *je matice přechodu od báze* $g_1, g_2, ..., g_n$ *k bázi* $f_1, f_2, ..., f_n$,
4. $\mathbf{T}^{-1}\widehat{x} = \widetilde{x}$ *pro každé* $x \in \mathcal{U}$.