

5 - Domácí cvičení č. 5

Příklad 5.1. Rozhodněte, zda dané zobrazení je lineární.

1. $\mathcal{L}: \mathbb{R}_3 \rightarrow \mathbb{R}_5$ dané předpisem
 $\mathcal{L}([a, b, c]^T) = [2a - b + c, 0, a + 3b - c, 0, 3a + 2b]^T,$
2. $\mathcal{L}: \mathbb{R}_4 \rightarrow \mathbb{R}_2$ dané předpisem
 $\mathcal{L}([a, b, c, d]^T) = [a - b + 2c + 1, b - d - a]^T,$
3. $\mathcal{L}: \mathcal{P}_3 \rightarrow \mathbb{R}_2$ dané předpisem
 $\mathcal{L}(ax^3 + bx^2 + cx + d) = [a - b + 2c, b - d - a]^T,$
4. $\mathcal{L}: \mathcal{M}_{2,3} \rightarrow \mathcal{P}_2$ dané předpisem
 $\mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}\right) = (a + b)x^2 + (c + d)x + (e + f),$
5. $\mathcal{L}: \mathbb{R}_2 \rightarrow \mathcal{P}_3$ dané předpisem
 $\mathcal{L}([a, b]^T) = (a + b)x^3 + 2bx^2 + abx + (2a + b),$
6. $\mathcal{L}: \mathbb{R}_4 \rightarrow \mathbb{R}_2$ dané předpisem
 $\mathcal{L}(x) = \mathbf{A}x$, kde $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -5 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix},$
7. $\mathcal{L}: \mathbb{R}_3 \rightarrow \mathbb{R}_2$ dané předpisem
 $\mathcal{L}(x) = \mathbf{A}x + b$, kde $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix},$
8. $\mathcal{L}: \mathcal{M}_{2,2} \rightarrow \mathcal{P}_2$ dané předpisem
 $\mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (ax)^2 + (b + c)x + d,$
9. $\mathcal{L}: \mathbb{R}_2 \rightarrow \mathbb{R}$ dané předpisem
 $\mathcal{L}([a, b]^T) = e^{a+b}.$

Příklad 5.2. Určete dimenzi a najděte alespoň jednu bázi jádra $\text{Ker}\mathcal{L}$ a obrazu $\text{Im}\mathcal{L}$.

1. $\mathcal{L}: \mathbb{R}_3 \rightarrow \mathbb{R}_5$ dané předpisem
 $\mathcal{L}([a, b, c]^T) = [2a - b + c, 0, a + 3b - c, 0, 3a + 2b]^T,$
2. $\mathcal{L}: \mathcal{P}_3 \rightarrow \mathbb{R}_2$ dané předpisem
 $\mathcal{L}(ax^3 + bx^2 + cx + d) = [a - b + 2c, b - d - a]^T,$
3. $\mathcal{L}: \mathcal{M}_{2,3} \rightarrow \mathcal{P}_2$ dané předpisem
 $\mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}\right) = (a + b)x^2 + (c + d)x + (e + f),$
4. $\mathcal{L}: \mathbb{R}_4 \rightarrow \mathbb{R}_2$ dané předpisem
 $\mathcal{L}(x) = \mathbf{A}x$, kde $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix},$
5. $\mathcal{L}: \mathbb{R}_3 \rightarrow \mathbb{R}_4$ dané předpisem
 $\mathcal{L}(x) = \mathbf{A}x$, kde $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix},$

6. $\mathcal{L}: \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}_5$ dané předpisem
 $\mathcal{L}(ax^2 + bx + c) = [a + 2b + c, a - c, 2a + b - c, a + b, -a + b + 2c]^T$.

Příklad 5.3. Určete matici \mathbf{A} lineárního zobrazení \mathcal{L} ve standardních bázích e_1, e_2, \dots a p_1, p_2, \dots

- $\mathcal{L}: \mathbb{R}_3 \rightarrow \mathbb{R}_5$ dané předpisem
 $\mathcal{L}([a, b, c]^T) = [2a - b + c, 0, a + 3b - c, 0, 3a + 2b]^T$,
 $\mathbb{R}_3: e_1 = [1, 0, 0]^T, e_2 = [0, 1, 0]^T, e_3 = [0, 0, 1]^T$,
 $\mathbb{R}_5: p_1 = [1, 0, 0, 0, 0]^T, p_2 = [0, 1, 0, 0, 0]^T, p_3 = [0, 0, 1, 0, 0]^T, p_4 = [0, 0, 0, 1, 0]^T$,
 $p_5 = [0, 0, 0, 0, 1]^T$,
- $\mathcal{L}: \mathcal{P}_3 \rightarrow \mathbb{R}_2$ dané předpisem
 $\mathcal{L}(ax^3 + bx^2 + cx + d) = [a - b + 2c, b - d - a]^T$,
 $\mathcal{P}_3: e_1 = x^3, e_2 = x^2, e_3 = x, e_4 = 1$,
 $\mathbb{R}_2: p_1 = [1, 0]^T, p_2 = [0, 1]^T$,
- $\mathcal{L}: \mathcal{M}_{2,3} \rightarrow \mathcal{P}_2$ dané předpisem
 $\mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}\right) = (a + b)x^2 + (c + d)x + (e + f)$,
 $\mathcal{M}_{2,3}: \mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{E}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,
 $\mathbf{E}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{E}_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,
 $\mathcal{P}_2: p_1 = x^2, p_2 = x, p_3 = 1$.
- $\mathcal{L}: \mathbb{R}_3 \rightarrow \mathbb{R}_4$ dané předpisem
 $\mathcal{L}(x) = \mathbf{C}x$, kde $x \in \mathbb{R}_3, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$
 $\mathbb{R}_3: e_1 = [1, 0, 0]^T, e_2 = [0, 1, 0]^T, e_3 = [0, 0, 1]^T$,
 $\mathbb{R}_4: p_1 = [1, 0, 0, 0]^T, p_2 = [0, 1, 0, 0]^T, p_3 = [0, 0, 1, 0]^T, p_4 = [0, 0, 0, 1]^T$.

Příklad 5.4. Určete matici \mathbf{B} lineárního zobrazení \mathcal{L} v bázích v_1, v_2, \dots a u_1, u_2, \dots

- $\mathcal{L}: \mathbb{R}_3 \rightarrow \mathbb{R}_5$ dané předpisem
 $\mathcal{L}([a, b, c]^T) = [2a - b + c, 0, a + 3b - c, 0, 3a + 2b]^T$,
 $\mathbb{R}_3: v_1 = [1, 2, 3]^T, v_2 = [2, 1, 3]^T, v_3 = [3, 1, 2]^T$,
 $\mathbb{R}_5: u_1 = [1, 2, -1, 1, 1]^T, u_2 = [2, 1, 1, 1, 0]^T, u_3 = [-1, 3, 1, 0, 0]^T, u_4 = [2, 1, 0, 0, 0]^T, u_5 = [1, 0, 0, 0, 0]^T$,
- $\mathcal{L}: \mathcal{P}_3 \rightarrow \mathbb{R}_2$ dané předpisem
 $\mathcal{L}(ax^3 + bx^2 + cx + d) = [a - b + 2c, b - d - a]^T$,
 $\mathcal{P}_3: v_1 = x^3 + 2x^2 + x + 2, v_2 = x^3 + 2x^2 + x - 2, v_3 = x^3 + 2x^2 - x - 2, v_4 = x^3 - 2x^2 - x - 2$,
 $\mathbb{R}_2: u_1 = [1, 2]^T, u_2 = [2, 1]^T$,
- $\mathcal{L}: \mathcal{M}_{2,3} \rightarrow \mathcal{P}_2$ dané předpisem
 $\mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}\right) = (a + b)x^2 + (c + d)x + (e + f)$,
 $\mathcal{M}_{2,3}: \mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{V}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{V}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,
 $\mathbf{V}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{V}_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$,
 $\mathcal{P}_2: u_1 = x^2 + 2x, u_2 = x + 2, u_3 = 2x^2 + 1$,

4. $\mathcal{L}: \mathbb{R}_3 \rightarrow \mathbb{R}_4$ dané předpisem

$$\mathcal{L}(x) = \mathbf{C}x, \text{ kde } x \in \mathbb{R}_3, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{R}_3: v_1 = [1, 2, 1]^T, v_2 = [2, 1, 1]^T, v_3 = [1, 1, 2]^T,$$

$$\mathbb{R}_4: u_1 = [1, 1, 1, 0]^T, u_2 = [1, 1, 0, 1]^T, u_3 = [1, 0, 1, 1]^T, u_4 = [0, 1, 1, 1]^T.$$

Příklad 5.5. Je dáno zobrazení $\mathcal{L}: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$.

- Ukažte, že zobrazení je lineární.
- Určete bázi a dimenzi jádra $\text{Ker}\mathcal{L}$ a obrazu $\text{Im}\mathcal{L}$.
- Určete matici \mathbf{A} lineárního zobrazení \mathcal{L} ve standardních bázích e_1, e_2, \dots prostoru \mathcal{V} a f_1, f_2, \dots prostoru \mathcal{U} .
- Určete matici \mathbf{B} lineárního zobrazení \mathcal{L} v bázích v_1, v_2, \dots prostoru \mathcal{V} a u_1, u_2, \dots prostoru \mathcal{U} .
- Určete \mathbf{T} matici přechodu od standardní báze e_1, e_2, \dots k bázi v_1, v_2, \dots prostoru \mathcal{V} .
- Určete \mathbf{H} matici přechodu od standardní báze f_1, f_2, \dots k bázi u_1, u_2, \dots prostoru \mathcal{U} .
- Ukažte, že $\mathbf{B} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$.

Řešte pro zobrazení $\mathcal{L}: \mathbb{R}_3 \rightarrow \mathbb{R}_2$, které je dáno předpisem

$$\mathcal{L}([a, b, c]^T) = [a + 2b - c, 2a + 3b + 3c]^T.$$

Báze prostoru $\mathcal{V} = \mathbb{R}_3$:

$$e_1 = [1, 0, 0]^T, e_2 = [0, 1, 0]^T, e_3 = [0, 0, 1]^T;$$

$$v_1 = [1, 2, -1]^T, v_2 = [2, -1, 1]^T, v_3 = [-1, 1, 2]^T;$$

Báze prostoru $\mathcal{U} = \mathbb{R}_2$:

$$f_1 = [1, 0]^T, f_2 = [0, 1]^T;$$

$$u_1 = [1, 3]^T, u_2 = [3, 1]^T.$$

Příklad 5.6. Je dáno zobrazení $\mathcal{L}: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$.

- Ukažte, že zobrazení je lineární.
- Určete bázi a dimenzi jádra $\text{Ker}\mathcal{L}$ a obrazu $\text{Im}\mathcal{L}$.
- Určete matici \mathbf{A} lineárního zobrazení \mathcal{L} ve standardních bázích e_1, e_2, \dots prostoru \mathcal{V} a f_1, f_2, \dots prostoru \mathcal{U} .
- Určete matici \mathbf{B} lineárního zobrazení \mathcal{L} v bázích v_1, v_2, \dots prostoru \mathcal{V} a u_1, u_2, \dots prostoru \mathcal{U} .
- Určete \mathbf{T} matici přechodu od standardní báze e_1, e_2, \dots k bázi v_1, v_2, \dots prostoru \mathcal{V} .
- Určete \mathbf{H} matici přechodu od standardní báze f_1, f_2, \dots k bázi u_1, u_2, \dots prostoru \mathcal{U} .
- Ukažte, že $\mathbf{B} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$.

Řešte pro zobrazení $\mathcal{L}: \mathbb{R}_2 \rightarrow \mathcal{P}_4$, které je dáno předpisem

$$\mathcal{L}([a, b]^T) = (a - b)x^4 + (2a + b)x^3 + 2bx + (b - a).$$

Báze prostoru $\mathcal{V} = \mathbb{R}_2$:

$$e_1 = [1, 0]^T, \quad e_2 = [0, 1]^T;$$

$$v_1 = [1, 3]^T, \quad v_2 = [2, -3]^T;$$

Báze prostoru $\mathcal{U} = \mathcal{P}_4$:

$$f_1 = x^4, \quad f_2 = x^3, \quad f_3 = x^2, \quad f_4 = x, \quad f_5 = 1;$$

$$u_1 = x^4 + x^2, \quad u_2 = x^3 + x, \quad u_3 = x^2 + 1, \quad u_4 = x^4 + x, \quad u_5 = x^3 + 1.$$

Příklad 5.7. Jsou dána lineární zobrazení $\mathcal{L}_1: \mathbb{R}_3 \rightarrow \mathcal{P}_4$ dané předpisem

$$\mathcal{L}_1([a, b, c]^T) = (a + b)x^4 + (2a - c)x^3 + (b + 3c)x^2 + (2a + b)x + (b + 4c),$$

$\mathcal{L}_2: \mathcal{P}_4 \rightarrow \mathcal{M}_{2,2}$ dané předpisem

$$\mathcal{L}_2(ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e) = \begin{bmatrix} a + d - e & b + 2c + e \\ 2a - c + 2d & b + d + 3e \end{bmatrix}.$$

(a) Určete složené zobrazení $\mathcal{L}: \mathbb{R}_3 \rightarrow \mathcal{M}_{2,2}$,

(b) Určete matice $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ lineárních zobrazení $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ a matici \mathbf{A} složeného zobrazení \mathcal{L} ve standardních bázích

$$\mathbb{R}_3: e_1 = [1, 0, 0]^T, \quad e_2 = [0, 1, 0]^T, \quad e_3 = [0, 0, 1]^T,$$

$$\mathcal{P}_4: p_1 = x^4, \quad p_2 = x^3, \quad p_3 = x^2, \quad p_4 = x, \quad p_5 = 1,$$

$$\mathcal{M}_{2,2}: \mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

(c) Určete $\mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1$.

Příklad 5.8. Jsou dána lineární zobrazení $\mathcal{L}_1: \mathbb{R}_4 \rightarrow \mathcal{P}_2$ dané předpisem

$$\mathcal{L}_1([a, b, c, d]^T) = (a + c - d)x^2 + (b + d - a)x + (b + c),$$

$\mathcal{L}_2: \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}_5$ dané předpisem

$$\mathcal{L}_2(ax^2 + bx + c) = [a + b, b + c, a + c, a + 2b + c, a + b + 2c]^T.$$

(a) Určete složené zobrazení $\mathcal{L}: \mathbb{R}_4 \rightarrow \mathbb{R}_5$,

(b) Určete matice $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ lineárních zobrazení $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ a matici \mathbf{A} složeného zobrazení \mathcal{L} v bázích

$$\mathbb{R}_4: v_1 = [1, 1, 0, 0]^T, \quad v_2 = [0, 1, -1, 1]^T, \quad v_3 = [-2, -1, 2, 2]^T, \quad v_4 = [1, 1, 1, 1]^T,$$

$$\mathcal{P}_2: p_1 = x^2 - 3x + 2, \quad p_2 = 3x^2 + 2x - 1, \quad p_3 = 2x^2 + x - 3,$$

$$\mathbb{R}_5: u_1 = [1, -1, 0, 0, 0]^T, \quad u_2 = [0, 1, -1, 0, 0]^T, \quad u_3 = [0, 0, 1, -1, 0]^T, \quad u_4 = [0, 0, 0, 1, 1]^T, \\ u_5 = [-1, 0, 0, 0, 1]^T,$$

(c) Určete $\mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1$.

Příklad 5.9. Jsou dána lineární zobrazení $\mathcal{L}_1: \mathcal{M}_{2,3} \rightarrow \mathcal{P}_3$ dané předpisem

$$\mathcal{L}_1\left(\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}\right) = (a - b + 2e)x^3 + (b + c + 2d)x^2 + (2a + e - f)x + (a + 2b + c - e + 2d - f),$$

$\mathcal{L}_2: \mathcal{P}_3 \rightarrow \mathbb{R}_5$ dané předpisem

$$\mathcal{L}_2(ax^3 + bx^2 + cx + d) = [3a - c, 3b - d, 3c - b, 3d - a, a + b + c + d]^T.$$

(a) Určete složené zobrazení $\mathcal{L}: \mathcal{M}_{2,3} \rightarrow \mathbb{R}_5$,

(b) Určete matice $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ lineárních zobrazení $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ a matici \mathbf{A} složeného zobrazení \mathcal{L} v bázích

$$\mathcal{M}_{2,3}: \mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{V}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{V}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{V}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{V}_6 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{P}_3: p_1 = x^3 + x^2 - x - 1, p_2 = x^3 - x^2 - x + 1, p_3 = -x^3 + x^2 + x + 1, p_4 = -x^3 + x^2 - x + 1,$$

$$\mathcal{R}_5: u_1 = [1, 0, -1, 0, 1]^T, u_2 = [0, 1, 0, -1, 0]^T, u_3 = [1, 1, 1, -1, -1]^T, u_4 = [-1, 1, -1, 1, -1]^T, u_5 = [1, 1, 0, -1, 1]^T,$$

(c) Určete $\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1$.

Příklad 5.10. Je dáno lineární zobrazení $\mathcal{L}: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$. Skládáním tohoto zobrazení získáme $\mathcal{L}^2(u) = \mathcal{L}(\mathcal{L}(u))$, $\mathcal{L}^3(u) = \mathcal{L}(\mathcal{L}(\mathcal{L}(u)))$, ... Určete předpis zobrazení \mathcal{L}^k , dimenzi jádra a obrazu zobrazení \mathcal{L}^k pro každé $k = 1, \dots, n$.

1. $n = 3$, $\mathcal{U} = \mathbb{R}_3$, $\mathcal{L}: \mathbb{R}_3 \rightarrow \mathbb{R}_3$ je dané předpisem

$$\mathcal{L}([a, b, c]^T) = [5a + 8b + c, -3a - 5b - c, 2a + 3b]^T,$$

2. $n = 3$, $\mathcal{U} = \mathbb{R}_3$, $\mathcal{L}: \mathbb{R}_3 \rightarrow \mathbb{R}_3$ je dané předpisem

$$\mathcal{L}([a, b, c]^T) = [a + b - c, -a + b + c, 2b]^T,$$

3. $n = 2$, $\mathcal{U} = \mathbb{R}_3$, $\mathcal{L}: \mathbb{R}_3 \rightarrow \mathbb{R}_3$ je dané předpisem

$$\mathcal{L}([a, b, c]^T) = [-9a + 7b - 3c, -4a + 4b - c, 16a - 11b + 6c]^T,$$

4. $n = 3$, $\mathcal{U} = \mathcal{P}_2$, $\mathcal{L}: \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_2$ je dané předpisem

$$\mathcal{L}(ax^2 + bx + c) = (a - b)x^2 + (b - c)x + (c - a),$$

5. $n = 5$, $\mathcal{U} = \mathbb{R}_4$, $\mathcal{L}: \mathbb{R}_4 \rightarrow \mathbb{R}_4$ je dané předpisem

$$\mathcal{L}([a, b, c, d]^T) = [2a - 13b - 38c + 13d, -a + 6b + 18c - 6d, a - b - 6c + 3d, 3b + 7c - 2d]^T,$$

6. $n = 6$, $\mathcal{U} = \mathcal{P}_3$, $\mathcal{L}: \mathcal{P}_3 \rightarrow \mathcal{P}_3$ je dané předpisem

$$\mathcal{L}(ax^3 + bx^2 + cx + d) = (-3a + 2b - d)x^3 + (-11a + 6b + c - 2d)x^2 + (13a - 5b - 3c)x + (4a - 2b - c + d),$$

7. $n = 2$, $\mathcal{U} = \mathcal{M}_{2,2}$, $\mathcal{L}: \mathcal{M}_{2,2} \rightarrow \mathcal{M}_{2,2}$ je dané předpisem

$$\mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -18a + 9b - 2c + 4d & 2a + b - d \\ 100a - 45b + 12c - 22d & -26a + 12b - 2c + 7d \end{bmatrix}.$$

Příklad 5.11. Je dáno zobrazení $\mathcal{L}: \mathbb{R}_2 \rightarrow \mathcal{P}_1$ pro každé $[a, b]^T \in \mathbb{R}_2$ předpisem

$$\mathcal{L}([a, b]^T) = (2a - b)x + (a + 3b).$$

a) Ukažte, že zobrazení \mathcal{L} je izomorfismus.

b) Určete matici \mathbf{A} zobrazení \mathcal{L} ve standardních bázích

$$e_1 = [1, 0]^T, e_2 = [0, 1]^T \text{ prostoru } \mathbb{R}_2, p_1(x) = x, p_2(x) = 1 \text{ prostoru } \mathcal{P}_1.$$

c) Určete matici inverzní \mathbf{A}^{-1} k matici \mathbf{A} .

Označíme-li $\mathcal{L}(v) = q$ pro libovolné $v \in \mathbb{R}_2$, $q \in \mathcal{P}_1$, potom $\mathcal{L}^{-1}(q) = v$.

Pro inverzní zobrazení $\mathcal{L}^{-1}: \mathcal{P}_1 \rightarrow \mathbb{R}_2$ pak platí: $\mathbf{A}^{-1}\hat{q} = \tilde{v}$,

\hat{q} jsou souřadnice prvku $q = ax + b$ v bázi $p_1(x), p_2(x)$ prostoru \mathcal{P}_1 ,

\tilde{v} jsou souřadnice obrazu v v bázi e_1, e_2 prostoru \mathbb{R}_2 .

d) Určete $\tilde{v} = \mathbf{A}^{-1}\hat{q}$.

e) Určete prvek v ze souřadnic \tilde{v} v bázi e_1, e_2 prostoru \mathbb{R}_2 .

f) Napište předpis inverzního zobrazení $\mathcal{L}^{-1}: \mathcal{P}_1 \rightarrow \mathbb{R}_2$.