

Příklady k ZM2 - 1. Primitivní funkce, neurčitý integrál.

1. Najděte všechny primitivní funkce $F(x)$ k funkci $f(x)$:

a) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x}}$

f) $f(x) = \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{x}$

b) $f(x) = 4x^3 - 6\sqrt{x}$

g) $f(x) = \frac{x^2 - x}{\sqrt{x}} + e^x$

c) $f(x) = (x + 2)^2 \cdot (5x^2 - 4x)$

h) $f(x) = \frac{1}{x^3} - \sin x$

d) $f(x) = \left(\frac{3 - x^2}{x}\right)^2$

i) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{5}{\sqrt[3]{x^2}} + \cos x$

e) $f(x) = \frac{x - 1}{\sqrt[3]{x^2}}$

j) $f(x) = \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right)^2$

2. K dané funkci $f(x)$ nalezněte primitivní funkci $F(x)$, jejíž graf prochází daným bodem $P_0 = [x_0, F(x_0)]$. [Graf funkce $F(x)$ načrtněte do kart. souřadnic a vyznačte bod P_0 .]

a) $f(x) = 2$, $P_0 = [1, 3]$

e) $f(x) = \frac{1}{x}$, $P_0 = [e, 3]$

b) $f(x) = 2x - 4$, $P_0 = [0, 3]$

f) $f(x) = \frac{1}{x}$, $P_0 = [-e, 3]$

c) $f(x) = 3x^2$, $P_0 = [1, 0]$

g) $f(x) = e^x$, $P_0 = [0, 2]$

d) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $P_0 = [4, 2]$

h) $f(x) = 2 \cos x$, $P_0 = \left[\frac{\pi}{2}, 5\right]$

3. Vypočtěte:

a) $\int (4x^3 - 6x^2 + 6x + 5) dx$

f) $\int \left(7e^x - \frac{5}{x}\right) dx$

b) $\int \frac{6}{x^4} dx$

g) $\int (t + 3 \cos x) dx$, kde $t \in \mathbb{R}$ je konstanta

c) $\int \frac{x^2 \sqrt{x}}{x^5} dx$

h) $\int (t + 3 \cos x) dt$, kde $x \in \mathbb{R}$ je konstanta

d) $\int (5\sqrt{x} - x)^2 dx$

i) $\int (2a e^t - a t^2) dt$, kde $a > 0$ je konstanta

e) $\int \left(\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}} - \sqrt[4]{x^3}\right) dx$

j) $\int \pi(r^2 - x^2) dx$, kde $r > 0$ je konstanta

4. Vypočtěte:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } \int x \cdot \sin x \, dx; & \text{j) } \int \frac{3x+2}{3x^2+4x-4} \, dx; \\
 \text{b) } \int x^2 \cdot \cos x \, dx; & \text{k) } \int \frac{\ln^2 x}{x} \, dx; \\
 \text{c) } \int x^2 \cdot e^{-x} \, dx; & \text{l) } \int \frac{\cos x}{4-3 \sin x} \, dx; \\
 \text{d) } \int \ln x \, dx; & \text{m) } \int \cos^3 x \sin x \, dx; \\
 \text{e) } \int \sqrt{x} \cdot \ln x \, dx; & \text{n) } \int \frac{3x^3+x^2-12x-5}{x^2-4} \, dx; \\
 \text{f) } \int \operatorname{arctg} x \, dx; & \text{o) } \int \frac{2x^4-2x^3+3x^2-1}{x^2-x} \, dx; \\
 \text{g) } \int \cos^2 x \, dx; & \text{p) } \int \frac{2x^2+x-21}{x^3-4x^2-x+4} \, dx; \\
 \text{h) } \int \sin^3 x \, dx; & \text{q) } \int \frac{x^3+1}{(x-1)^4} \, dx. \\
 \text{i) } \int x \cdot e^{x^2} \, dx; &
 \end{array}$$

VÝSLEDKY: [$C \in \mathbb{R}$ je integrační konstanta.]

1. a) $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+C, x > 0$; b) $x^4-4x\sqrt{x}+C, x > 0$; c) $x^5+4x^4-\frac{4}{3}x^3-8x^2+C, x \in \mathbb{R}$;
d) $-\frac{9}{x}-6x+\frac{x^3}{3}+C, x \neq 0$; e) $\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}-3\sqrt[3]{x}+C, x \neq 0$; f) $x-4\sqrt{x}+\ln x+C, x > 0$;
g) $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}-\frac{2}{3}x\sqrt{x}+e^x+C, x > 0$; h) $-\frac{1}{2x^2}+\cos x+C, x \neq 0$; i) $6\sqrt{x}+15\sqrt[3]{x}+\sin x+C, x > 0$;
j) $x+\cos x+C, x \in \mathbb{R}$. 2. a) $2x+1, x \in \mathbb{R}$; b) $x^2-4x+3, x \in \mathbb{R}$;
c) $x^3-1, x \in \mathbb{R}$; d) $\sqrt{x}, x > 0$; e) $2+\ln x, x > 0$; f) $2+\ln(-x), x < 0$; g) $e^x+1, x \in \mathbb{R}$;
h) $3+2\sin x, x \in \mathbb{R}$. 3. a) $x^4-2x^3+3x^2+5x+C, x \in \mathbb{R}$; b) $-\frac{2}{x^3}+C, x \neq 0$; c) $-\frac{2\sqrt{x}}{3x^2}+C, x > 0$;
d) $\frac{25}{2}x^2-4x^2\sqrt{x}+\frac{1}{3}x^3+C, x > 0$; e) $4\sqrt{x}+9\sqrt[3]{x}-\frac{4}{7}x\sqrt[4]{x^3}+C, x > 0$;
f) $7e^x-\ln|x|^5+C, x \neq 0$; g) $tx+3\sin x+C, x \in \mathbb{R}$; h) $\frac{t^2}{2}+3t\cos x+C, t \in \mathbb{R}$;
i) $2ae^t-\frac{at^3}{3}+C, t \in \mathbb{R}$; j) $\pi\left(r^2x-\frac{x^3}{3}\right)+C, x \in \mathbb{R}$. 4. a) $-x\cos x+\sin x+C, x \in \mathbb{R}$;
b) $x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+C, x \in \mathbb{R}$; c) $-e^{-x}(x^2+2x+2)+C, x \in \mathbb{R}$; d) $-x+x\cdot\ln x+C, x > 0$;
e) $x\cdot\sqrt{x}\left(-\frac{4}{9}+\frac{2}{3}\cdot\ln x\right)+C, x > 0$; f) $x\operatorname{arctg} x-\ln\sqrt{1+x^2}+C, x \in \mathbb{R}$;
g) $\frac{1}{2}(x+\sin x\cos x)+C, x \in \mathbb{R}$; h) $\frac{\cos^3 x}{3}-\cos x+C, x \in \mathbb{R}$; i) $\frac{1}{2}e^{x^2}+C, x \in \mathbb{R}$;
j) $\ln\sqrt{3x^2+4x-4}+C, x \in (-\infty, -2) \cup \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$; k) $\frac{\ln^3 x}{3}+C, x > 0$; l) $-\frac{1}{3}\ln(4-3\sin x)+C, x \in \mathbb{R}$;
m) $\frac{-\cos^4 x}{4}+C, x \in \mathbb{R}$; n) $\frac{3}{2}x^2+x+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right|+C, x \neq \pm 2$;
o) $\frac{2}{3}x^3+3x+\ln|x(x-1)^2|+C, x \neq 0, x \neq 1$; p) $\ln\left|\frac{(x-1)^3(x-4)}{(x+1)^2}\right|+C, x \neq \pm 1, x \neq 4$;
q) $\ln|x-1|-\frac{3}{(x-1)}-\frac{3}{2(x-1)^2}-\frac{2}{3(x-1)^3}+C, x \neq 1$.