Příklady k ZM2 - 2. Určitý integrál (per partes, substituce, geom. aplikace)

1. Vypočtěte:

a) $\int_0^{\pi} x^2 \sin x \, dx;$

b) $\int_0^1 \ln(1+x^2)\, dx;$

c) $\int_0^e x^2 \cdot \ln x \, dx;$

d) $\int_0^{+\infty} x \cdot e^{-2x}\, dx;$

e) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{x^2+1}\, dx;$

f) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 x \cdot \sin x \, dx;$

g) $\int_0^{\pi} x^3 \sin x \, dx;$

h) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \sin x}{\cos^3 x}\, dx;$

i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \cos^3 x \, dx;$

j) $\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\, dx,\ a>0;$

k) $\int_0^{+\infty} a\, x^2\, e^{-ax}\, dx,\ a>0;$

l) $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\, dx.$

2. Vypočtěte obsah S množiny $M \subset R^2$ omezené křivkami:
[Před výpočtem množinu M načtněte do kartézských souřadnic a vyšrafujte ji.]

a) $y = x^2+1, y=0, x=-1, x=2$

b) $y = -x^2+2x-3,\ y=0, x=0, x=3$

c) $y=\sqrt{x},\ y=-x+6, y=0$

d) $y=x^2+2,\ y=8-x,\ y=0,\ x=0$

e) $y=-x^2+2x+8,\ y=8-2x$

f) $y=-x^2+2x+8,\ y=x+2$

g) $y=x^2-4x+5\,,\ y=-x^2+4x-1$

h) $y=|x|,\ y=\frac{x^2}{2}$

i) $y=x^2+4,\ y=-2x+12,\ y=0,\ x=0$

j) $y=x^2,\ y=6x-x^2,\ y=0$

3. Množina $M \subset R^2$ je omezena souřadnicovou osou x, přímkami $x=1\,,\ x=2$ a obloukem rovnoosé hyperboly $xy=1$.
Načtrněte těleso vzniklé rotací množiny M kolem osy x a vypočtěte jeho objem V.

4. Množina $M \subset R^2$ je omezena křivkou $y=\sqrt{4-x^2}$ a přímkou $y=2-x$.
Načtrněte těleso vzniklé rotací množiny M kolem osy x a vypočtěte jeho objem V.

5. Vypočtěte objem V komolého kužele, který vznikne rotací lichoběžníku o vrcholech [0;0], [2;0], [2;4], [0;2] kolem osy x.

6. Použitím určitého integrálu odvoďte vzorec pro objem:

a) koule o poloměru r

b) rotačního kužele o poloměru podstavy r a výšce v

c) rotačního komolého kužele s poloměry podstav r_1, r_2 a výškou v

d) tělesa omezeného rotačním protáhlým elipsoidem, resp. rotačním zploštělým elipsoidem, kde příslušná elipsa má poloosy a, b, $(a > b)$

Poznámka: *Rotační protáhlý elipsoid* vznikne rotací elipsy kolem hlavní osy, *rotační zploštělý elipsoid* vznikne rotací elipsy kolem vedlejší osy.
[Načrtněte oba druhy elipsoidů.]

e) tělesa omezeného rotačním paraboloidem a rovinou kolmou k jeho ose ve vzdálenosti v od jeho vrcholu (poloměr podstavy tohoto tělesa označme r)

Poznámka: *Rotační paraboloid* je plocha vzniklá rotací paraboly kolem osy paraboly.
[Načrtněte toto těleso.]

VÝSLEDKY: 1. a) $\pi^2 - 4$; b) $-2 + \frac{\pi}{2} + \ln 2$; c) $\frac{2e^3 - 1}{9}$; d) $\frac{1}{4}$; e) $\ln 2$; f) $\frac{3}{16}$. g) $\pi^3 - 6\pi$; h) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$; i) $\frac{2}{15}$; j) $\frac{1}{2}\pi a^2$; k) $\frac{\pi}{4} + \ln\sqrt{2}$; l) $\frac{3}{32}\pi^2$.

2. a) 6; b) 9; c) $\frac{22}{3}$; d) $\frac{74}{3}$; e) $\frac{32}{3}$; f) $\frac{125}{6}$; g) $\frac{8}{3}$; h) $\frac{4}{3}$; i) $\frac{80}{3}$; j) 27.

3. $\frac{\pi}{2}$. **4.** $\frac{8}{3}\pi$. **5.** $\frac{56}{3}\pi$.

6. a) $\frac{4}{3}\pi r^3$; b) $\frac{1}{3}\pi r^2 v$; c) $\frac{1}{3}\pi v\,(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$; d) $\frac{4}{3}\pi a b^2$; resp. $\frac{4}{3}\pi a^2 b$; e) $\frac{1}{2}\pi r^2 v$.