

INTEGRÁLNÍ POČET

1. Primitivní funkce, neurčitý integrál

Označení: Nechť $f = f(x)$ je funkce definovaná (aspoň) na **otevřeném** intervalu \mathcal{I} .

Definice: Libovolnou funkci $F(x)$, pro kterou platí :

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathcal{I},$$

nazveme **PRIMITIVNÍ FUNKCÍ** k funkci f (na int. \mathcal{I}).

Pozn.:

- 1) Postačující podmínka pro *existenci* primit. fce $F(x)$ je spojitost fce $f(x)$ na intervalu \mathcal{I} .
- 2) Je-li $F(x)$ primit. fce k fci $f(x)$, pak všechny primit. fce k fci $f(x)$ jsou $F(x) + c$, kde c je konstanta.

Definice: Množinu všech primitivních fceí k dané fci f nazýváme **NEURČITÝ INTEGRÁL** funkce f , ozn. $\int f(x) dx$.

Pozn.: Krátce lze tedy psát

$$\int f(x) dx = F(x) + c$$

\int ... integrační znaménko
 $f(x)$... integrand
 dx ... diferenciál
 c ... **integrační konstanta**, $c \in R$

(V násl. větách předpokládáme existenci zde uvedených integrálů, resp. derivací.)

Věta (o vytknutí konstanty, resp. o aditivitě):

$$\int k \cdot f(x) dx = k \int f(x) dx, \text{ kde } k \in R \text{ je konstanta,}$$

resp.

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

Základní vzorce pro integrování

1. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C,$ $\begin{cases} x \in \mathbb{R}, & a \in \mathbb{N}, \\ x \neq 0, & a \in \mathbb{Z}, a \neq -1, \\ x > 0, & a \in \mathbb{R}, a \neq -1, \end{cases}$
2. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$ $x \neq 0,$
3. $\int e^x dx = e^x + C,$ $x \in \mathbb{R},$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$ $x \in \mathbb{R}, a \neq 1, a > 0,$
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C,$ $x \in \mathbb{R},$
6. $\int \cos x dx = \sin x + C,$ $x \in \mathbb{R},$
7. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$ $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z},$
8. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x + C,$ $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z},$
9. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C,$ $x \in (-1, 1),$
10. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C,$ $x \in \mathbb{R},$

Integrace per partes

Nechť funkce u a v mají na intervalu (a, b) spojitě první derivace u' a v' . Potom

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx.$$

Pro funkce u a v , které mají na intervalu (a, b) spojitě derivace až do řádu 3 (obecně n) platí

$$\int u(x)v'''(x) dx = \begin{array}{c|c} D & I \\ \hline u(x) & v'''(x) \\ & + \\ u'(x) & v''(x) \\ & - \\ u''(x) & v'(x) \\ & + \\ u'''(x) & v(x) \\ & - \end{array} = +u(x)v''(x) - u'(x)v'(x) + u''(x)v(x) - \int u'''(x)v(x) dx$$

Věta (o substituci):

Je-li $f(\varphi(x))$ složená funkce, pak na integrály typu $\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx$ lze použít substituci

$$t = \varphi(x)$$

a dostaneme:

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = \int f(t) dt$$

Integrace racionálních funkcí $R(x)$:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad [P(x), Q(x) \dots \text{polynomy}]$$

POZOR: $\int R(x) dx \neq \frac{\int P(x) dx}{\int Q(x) dx}$

Nutno $R(x)$ rozložit na tzv. **parciální zlomky**, k nimž umíme najít primitivní funkci. Lze předpokládat, že stupeň $P(x) <$ stupeň $Q(x)$ (jinak provedeme naznačené dělení polynomů). Rozklad $R(x)$ závisí na kořenech $Q(x)$: má-li $Q(x)$ jen **reálné kořeny**, pak každý takový kořen α násobnosti k vede k parciálním zlomkům tvaru

$$\frac{A_1}{x - \alpha} + \frac{A_2}{(x - \alpha)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x - \alpha)^k} \quad [*]$$

kde A_1, A_2, \dots, A_k určíme **metodou porovnání koeficientů** (u $R(x)$ a u [*]).

Integrace $R(x)$ pak vede k součtu integrací zlomků typu [*].

Integrace parciálních zlomků s reálným kořenem

(a) reálný kořen α násobnosti jedna:

$$\int \frac{A}{x - \alpha} dx = A \cdot \ln|x - \alpha| + c \quad C \in \mathbb{R}.$$

(b) reálný kořen α násobnosti n :

$$\int \frac{A}{(x - \alpha)^n} dx = \frac{A}{1 - n} \cdot \frac{1}{(x - \alpha)^{n-1}} + c \quad C \in \mathbb{R}.$$