2. Určitý integrál

Definice: Nechť na otevřeném intervalu $\mathcal{I}$ k funkci $f(x)$ existuje primitivní funkce $F(x)$ a nechť uzavřený interval $\langle a, b\rangle \subset \mathcal{I}$.

URČITÝ INTEGRÁL funkce f od a do b, píšeme $\int_a^b f(x)\,dx$, pak definujeme vztahem:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

tzv. *Newton-Leibnizova formule.*

a … tzv. *dolní integrační mez,*
b … tzv. *horní integrační mez*

$F(b) - F(a)$ lze psát zkratkou $[F(x)]_a^b$

Pozn.: Určitý integrál je **reálné číslo**, které je jednoznačně určené, neboť N.-L. formule nezávisí na výběru primit. fce $F(x)$

Pozn.: (geometrická interpretace)
Je-li $y = f(x)$ funkce **spojitá** a **nezáporná** v int. $\langle a, b\rangle$ a je-li S obsah množiny $M \subset R^2$ omezené grafem fce $f(x)$ a přímkami $y = 0$, $x = a$, $x = b$, pak platí:

$$\boxed{S = \int_a^b f(x)\,dx}$$

Věta: Platí (existují-li integrály vpravo):

$$\int_a^b k \cdot f(x)\,dx = k \int_a^b f(x)\,dx, \text{ kde } k \in R$$

$$\int_a^b [\,f(x) + g(x)\,]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, \qquad \text{kde} \qquad a < c < b$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

Věta (o integrování "per partes"):

Existují-li uvedené integrály a derivace, pak:

$$\int_a^b u'(x)\, v(x) dx = [u(x)\, v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)\, v'(x) dx$$

Věta (o substituci):

Je-li $f(\varphi(x))$ složená funkce a $\varphi(x)$ je ryze monotónní v intervalu $\langle a, b\rangle$, pak použitím substituce $t = \varphi(x)$ dostaneme:

$$\int_a^b f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\, dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\, dt$$

---

3. Nevlastní integrál (vlivem meze)

Zobecníme definici určitého integrálu pomocí Newton - Leibnizovy formule takto:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx = F(b-) - F(a+)}$$

kde $F(b-) = \lim\limits_{x \to b-} F(x)$ (limita zleva),

$F(a+) = \lim\limits_{x \to a+} F(x)$ (limita zprava),

přičemž uvedená formule platí, existují-li **konečné** (vlastní) limity $F(b-)$, $F(a+)$. Neexistuje-li některá z těchto limit, nebo je nevlastní, říkáme, že integrál **diverguje**.

Pozn.: Je-li $F(x)$ **spojitá** v bodě a, resp. b, pak $F(a+) = F(a)$, resp. $F(b-) = F(b)$.

5. Některé aplikace určitého integrálu

a) OBSAH MNOŽINY

Je-li $M \subset R^2$ omezená křivkami

$x = a,\ x = b,\ y = f(x),\ y = g(x),$

kde $f(x) \geq g(x)\ \forall x \in \langle a, b\rangle$ jsou spojité funkce, pak obsah S množiny M je

$$\boxed{S = \int_a^b [\,f(x) - g(x)\,]\, dx}$$

b) OBJEM ROTAČNÍHO TĚLESA

Je-li T těleso, které vznikne rotací křivky $y = f(x)$ kolem osy x mezi rovinami $x = a$, $x = b$, pak objem V tělesa T je

$$\boxed{V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx}$$

Pozn.:

Objem V tělesa T, které vznikne rotací křivky $x = g(y)$ kolem osy y mezi rovinami $y = \alpha$, $y = \beta$, je

$$V = \pi \int_\alpha^\beta g^2(y)\, dy$$