Příklady k ZM2 - 3. Funkce dvou proměnných.

1. Kulová plocha je dána rovnicí: $x^2 + y^2 + z^2 - 10x - 8y - 58 = 0$.
   (a) Určete souřadnice středu S a poloměr r této plochy.
   (b) Určete rovnici tečné roviny τ a rovnici normály ν k této ploše v bodě $T = [2;\ 1;\ z_0 < 0]$.

2. Určete definiční obor $D(f)$ funkce $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{y}{x^2+y^2-3}}$ a načrtněte jej do kartézských souřadnic v rovině (vyšrafujte množinu $D(f)$).

3. Určete definiční obor $D(f)$ funkce $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{xy}{x+y-5}}$ a načrtněte jej do kartézských souřadnic v rovině (vyšrafujte množinu $D(f)$).

4. Funkce $z = f(x,y)$ je dána předpisem: $f(x,y) = \dfrac{\ln(2-x^2-y^2)}{\sqrt{4x-y^2}}$.
   (a) Určete definiční obor $D(f)$ funkce f a načrtněte jej do kartézských souřadnic.
   (b) Určete hodnotu gradientu funkce f v bodě $P = [1;\ 0]$.

5. Funkce $z = f(x,y)$ je dána předpisem: $f(x,y) = \ln(2x+3y) + \sqrt{x^2+y^2-2}$.
   (a) Určete definiční obor $D(f)$ funkce f a načrtněte jej do kartézských souřadnic.
   (b) Rozhodněte, zda bod $P = \left[\dfrac{1}{2};\ \dfrac{4}{3}\right]$ je vnitřním, vnějším či hraničním bodem množiny $D(f)$.

6. Funkce (plocha) $z = f(x,y)$ je dána předpisem: $z = \sqrt{4y-x^2-y^2}$.
   (a) Určete definiční obor $D(f)$ funkce f a načrtněte jej do kartézských souřadnic v rovině.
   (b) Určete řez této plochy rovinou $x = 0$ a znázorněte jej do kart. souřadnic v rovině.
   (c) Určete řez této plochy rovinou $y = 2$ a znázorněte jej do kart. souřadnic v rovině.
   (d) Plochu (uveďte její název) znázorněte do kartézských souřadnic v prostoru.

7. Funkce (plocha) $z = f(x,y)$ je dána předpisem: $z = \sqrt{5-x^2-y^2}$.
   Určete (tři) hladiny této plochy pro $z = c$, kde $z = 0, 1, 2$, a znázorněte je do týchž kartézských souřadnic v rovině.
   Určete název plochy a plochu znázorněte do kartézských souřadnic v prostoru.

8. Funkce $z = f(x,y)$ je dána předpisem: $z = \sqrt{6-2x^2-3y^2}$.
   (a) Určete definiční obor $D(f)$ funkce f a načrtněte jej do kartézských souřadnic.
   (b) Určete řez grafem funkce rovinou $x = 0$ a načrtněte jej do kartézských souřadnic.
   (c) Uveďte název plochy, která je grafem funkce f.

9. Najděte stacionární body a lokální extrémy funkce: $f(x,y) = x^2y + 18y^3 - x^2 - 45y^2$ na množině R^2.

10. Najděte stacionární body a lokální extrémy funkce: $f(x,y) = xy + \dfrac{18}{x} + \dfrac{12}{y}$. na množině $G = \{[x,y] \in R^2; x > 0, y > 0\}$.

11. Najděte lokální a absolutní extrémy funkce: $f(x,y) = -x^2 - y^2 + xy + 3y + 1$ na uzavřeném trojúhelníku s vrcholy v bodech $[0;0], [4;0], [0;4]$.

12. Najděte lokální a absolutní extrémy funkce $f(x,y) = 2x^3 + 2y^3 - 3xy + 1$ na uzavřeném trojúhelníku s vrcholy v bodech $[0;\,0]$, $[2;\,0]$, $[0;\,2]$.

13. Najděte lokální a absolutní extrémy funkce: $f(x,y) = x^3 + 8y^3 - 6xy - 1$ na uzavřeném trojúhelníku s vrcholy v bodech $[0;0], [2;0], [2;2]$.

14. Najděte lokální a absolutní extrémy funkce $f(x,y) = x^3 - 4y^3 - 6x + 12y - 8$ na uzavřeném lichoběžníku s vrcholy v bodech $[0;\,0]$, $[0;\,-2]$, $[2;\,-2]$, $[2;\,2]$.

VÝSLEDKY: [Nejsou zde uvedeny náčrtky do kart. souřadnic - doporučuje se připomenout si základní rovnice a parametry kuželoseček ze SŠ.]

1. a) $S = [5,4,0], r = \sqrt{99}$; b)$\tau : x + y + 3z + 24 = 0, \nu : X = [2,1,-9] + \alpha(1,1,3), \alpha \in R$.

2. $D(f) = \{[x,y] \in R^2; (y \geq 0 \,\&\, x^2 + y^2 > 3) \vee (y \leq 0 \,\&\, x^2 + y^2 < 3)\}$.

3. $D(f) = \{[x,y] \in R^2; (xy \geq 0 \,\&\, y > 5 - x) \vee (xy \leq 0 \,\&\, y < 5 - x)\}$.

4. a) $D(f) = \{[x,y] \in R^2; x^2 + y^2 < 2 \,\&\, y^2 < 4x\}$; b) $gradf|_P = (-1, 0)$.

5. a) $D(f) = \{[x,y] \in R^2; y > -\frac{2}{3}x \,\&\, x^2 + y^2 \geq 2\}$; b) P je vnitřním bodem $D(f)$.

6. a) $D(f) = \{[x,y] \in R^2; x^2 + (y-2)^2 \leq 4\}$ - kruh $S = [0,2], r = 2$;
b) $(y-2)^2 + z^2 = 4, z \geq 0$ - polokružnice $S = [0,2], r = 2$;
c) $x^2 + z^2 = 4, z \geq 0$ - polokružnice $S = [0,0], r = 2$; d) "horní" polosféra.

7. $x^2 + y^2 = 5,\; x^2 + y^2 = 4,\; x^2 + y^2 = 1$ - soustředné kružnice $S = [0,0]$ o poloměrech $r = \sqrt{5}, r = 2, r = 1$. Plochou je "horní" polosféra $x^2 + y^2 + z^2 = 5,\; z \geq 0,\; S[0,0,0]$, $r = \sqrt{5}$.

8. a) $D(f) = \{[x,y] \in R^2; \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} \leq 1\}$ - elipsa a její vnitřek,
b) $\frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{6} = 1, z \geq 0$ - "horní" polovina elipsy,
c) polovina elipsoidu $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{6} = 1, z \geq 0,$ - střed $S = [0,0,0]$, poloosy $a = \sqrt{3},\; b = \sqrt{2},\; c = \sqrt{6}$.

9. Stac. body: $S_1 = [0,0],\; S_2 = \left[0, \frac{5}{3}\right],\; S_3 = [6,1],\; S_4 = [-6,1]$, lok. max. v S_1, $f(S_1) = 0$, lok. min. v S_2, $f(S_2) = -\frac{125}{3}$.

10. Stac. bod a lok min.: $S = [3,2]$, $f(S) = 18$.

[V následujících výsledcích uvedeny jen absolutní extrémy na daných množinách.]

11. $minf = f(4,0) = -15, \quad maxf = f(1,2) = 4$.

12. $minf = f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}, \quad maxf = f(0,2) = f(2,0) = 17$.

13. $minf = f\left(1, \frac{1}{2}\right) = -2, \quad maxf = f(2,2) = 47$.

14. $minf = f(\sqrt{2}, -1) \doteq -21.7, \quad maxf = f(0,-2) = 0$.