

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA

Fakulta aplikovaných věd

Kateda matematiky

MATEMATICKÁ ANALÝZA I

Prof. RNDr. Pavel Drábek, DrSc.
Prof. RNDr. Stanislav Míka, CSc.

1992

ISBN 80 - 7082 - 083 - 7

© Prof. RNDr. Pavel Drábek, DrSc.
Prof. RNDr. Stanislav Míka, CSc.
Plzeň 1993

PŘEDMLUVA K PRVNÍMU VYDÁNÍ

Předkládaný účelový učební text je stručným záznamem přednášek z **matematické analýzy I** (1.semestr) v 1. ročníku fakulty aplikovaných věd. Jedná se o pomocný studijní materiál, kde jsou zavedeny nejdůležitější pojmy, formulovány věty a naznačeny jejich důkazy. K plnému pochopení problematiky jsou zřejmě nezbytné slovní vysvětlující komentáře na přednášce nebo hlubší studium podrobnějších učebnic.

Plzeň, únor 1991

PŘEDMLUVA K DRUHÉMU VYDÁNÍ

Úmyslem autorů bylo, aby druhé vydání záznamu přednášek z **matematické analýzy I** bylo napsáno kvalitnější sazbou a aby v něm byly ve větší míře odstraněny nedostatky. V zájmu toho, aby posluchači 1. ročníku FAV měli tato skripta ještě v průběhu zimního semestru, byly některé opravy provedeny ručně a lepší sazbou byla napsána pouze předmluva a dodatek. Prosíme proto čtenáře, aby přijal naši omluvu.

PAVEL DRÁBEK

STANISLAV MÍKA

Plzeň, listopad 1992

O B S A H

<u>1. Základní matematické pojmy</u>	
1.1. Množiny a operace s nimi	4
1.2. Logické symboly. Výroky a výrokové formy ...	5
1.3. Zobrazení množin	7
1.4. Spočetné a nespočetné množiny	10
1.5. Reálná čísla	14
1.6. Omezené podmnožiny \mathbb{R}	18
1.7. Supremum a infimum číselné množiny	20
1.8. Topologie číselné osy	22
<u>2. Posloupnosti reálných čísel</u>	
2.1. Posloupnosti a operace s nimi	24
2.2. Omezené a monotónní posloupnosti	25
2.3. Konvergentní posloupnosti	27
2.4. Vlastnosti konvergentních posloupností	29
2.5. Kritéria konvergence	33
2.6. Divergentní posloupnosti	37
<u>3. Číselné řady</u>	
3.1. Konvergentní řady	39
3.2. Kritéria konvergence	41
3.3. Kritéria konvergence pro řady s nezápornými členy	42
3.4. Altermující řady	45
<u>4. Reálné funkce jedné reálné proměnné</u>	
4.1. Základní pojmy	49
4.2. Některé elementární funkce	56
4.3. Limita funkce	56
4.4. Některá další fakta	65

11 5. Spojitost funkcí

5.1. Spojitost v bodě. Body nespojitosti	68
5.2. Spojitost v uzavřeném intervalu	72
5.3. Stejněměrná spojitost	74

6. Základní pojmy diferenciálního a integrálního počtu

6.1. Diference, derivace, diferenciál	76
6.2. Derivace a diferenciály elementárních funkcí	81
6.3. Fyzikální a geometrický význam derivace a diferenciálu	83
6.4. Základní věty diferenciálního počtu	84
6.5. Množiny spojitých a diferencovatelných funkcí	89
6.6. Primitivní funkce	90
6.7. Technika integrování	91

7. Newtonův integrál

7.1. Základní vlastnosti	98
7.2. Základní věty integrálního počtu	103
7.3. Integrální součet. Aplikace v geometrii a ve fyzice	109

8. Taylorova formule. Průběh funkce

8.1. Derivace a diferenciály vyšších řádů	120
8.2. Taylorův rozvoj	121
8.3. Základní pojmy optimalizace. Průběh funkce..	124

MATEMATICKÁ ANALÝZA I

1. Základní matematické pojmy.

1.1. Množiny a operace s nimi.

Množina - soubor navzájem různých objektů, které mají zpravidla jistou společnou vlastnost.

Značení: A, B, M, Ω, Γ ... velká písmena;

prvky množiny x, y, a, b ... malá písmena;

$x \in A$ (x je prvkem množiny A), $z \notin B$ (z není prvkem množiny B).

Příklad.

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$... množina určená výčtem prvků

$B = \{x \in M: V(x)\}$... množina všech prvků z M , které mají vlastnost $V(x)$

$C = \{x \in \mathbb{R}: x^2 \leq 1\}$... množina všech prvků z \mathbb{R} , pro které platí $x^2 \leq 1$

Podmnožina: $A \subset B \Leftrightarrow x \in A \Rightarrow x \in B$ (inkluze).

Slovy: "Každý prvek množiny A je prvkem množiny B ".

Prázdná množina \emptyset : množina, která neobsahuje žádný prvek, tj. vždy platí: $\emptyset \subset A$ pro libovolnou množinu A .

$A \not\subset B$: existuje $x \in A$ takový, že $x \notin B$.

Příklad.

$\{x \in \mathbb{R}: x^2 + 1 = 0\}$... prázdná množina.

Rovnost množin: $A = B$... množiny A, B se skládají z týchž prvků;

$A = B \Leftrightarrow A \subset B$ a $B \subset A$.

Číselné množiny: \mathbb{R} ... obor reálných čísel ($\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$),

\mathbb{Q} ... obor racionálních čísel

\mathbb{N} ... obor přirozených čísel,

\mathbb{Z} ... obor celých čísel,

\mathbb{C} ... obor komplexních čísel.

Operace s množinami:

Sjednocení: $A \cup B = \{x: x \in A \vee x \in B\}$,

Průnik: $A \cap B = \{x: x \in A \wedge x \in B\}$,

Množiny X a Y jsou disjunktní, je-li $X \cap Y = \emptyset$.

Rozdíl: $A - B = \{x: x \in A \wedge x \notin B\}$.

Doplňěk množiny $A \subset E$ do množiny E : $A_E = E - A$.

Příklad.

$x \in A_E \Leftrightarrow x \in E \wedge x \notin A$.

Platí: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$, $A \cup A = A$, $A \cap A = A$.

Další označení: $\bigcup_{k=1}^n A_k = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$... sjednocení konečného souboru (systému) množin,

$\bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$... sjednocení nekonečného souboru (systému) množin.

$x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k \Leftrightarrow \exists$ (alespoň jedno) $k \in \mathbb{N}: x \in S_k$.

$\bigcap_{k=1}^n B_k = B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n$... průnik konečného počtu množin,

$\bigcap_{k=1}^{\infty} P_k = P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap \dots$... průnik nekonečného počtu množin.

$x \in \bigcap P_k \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}: x \in P_k$.

Kartézský součin množin A, B : $A \times B = \{(a,b): a \in A, b \in B\}$
... množina uspořádaných dvojic prvků $a \in A$, $b \in B$.

Speciálně: $A \times A = A^2$; $A \times A \times A = A^3$, ... atd.

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Kartézský součin není komutativní: $A \times B \neq B \times A$, pokud $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ a $A \neq B$.

1.2. Logické symboly. Výroky.

V ... výrok je sdělení, u něhož má smysl hovořit o pravdivosti či nepravdivosti, přičemž platí právě jedna možnost.

Negace výroku V : V' , \bar{V} , non V , $\neg V$:

V je pravdivý právě tehdy, když \bar{V} je nepravdivý.

Příklad.

$V: x \in A$, negace $\bar{V}: x \notin A$.

Konjunkce: $V_1 \wedge V_2$... složený výrok (např. $\underbrace{x \in A}_{V_1} \wedge \underbrace{x \in B}_{V_2}$).

Disjunkce: $V_1 \vee V_2$... složený výrok.

Implikace: $V_1 \Rightarrow V_2$... složený výrok (např. $\underbrace{x \in A}_{V_1} \Rightarrow \underbrace{x \in B}_{V_2}$).

Ekvivalence: $V_1 \Leftrightarrow V_2$... složený výrok: " V_1 právě tehdy, když V_2 ",
" V_1 tehdy a jen tehdy, když V_2 ".

Příklad. Vytvořte nové výroky pomocí logických operací.

V_1 : Daný trojúhelník je pravoúhlý.

V_2 : V daném trojúhelníku platí Pythagorova věta.

Kvantifikované výroky

1. $\forall x \in M: V(x)$

pro každý prvek $x \in M$ platí $V(x)$ (každý prvek $x \in M$ má vlastnost $V(x)$).

Příklad.

$\forall x \in \mathbb{N}: x > 0$ "každé přirozené číslo x je kladné"
- pravdivý výrok,

$\forall x \in \mathbb{Q}: x < 5$ "každé racionální číslo je menší než 5"
- nepravdivý výrok.

2. $\exists x \in M: V(x)$

existuje prvek $x \in M$ s vlastností $V(x)$.

Příklad.

$\exists x \in \mathbb{N}: x > 0$... pravdivý;

$\exists x \in \mathbb{Q}: x < 5$... pravdivý;

$\exists x \in \mathbb{R}: x^2 + 1 = 0$... nepravdivý.

3. $\exists! x \in M: V(x)$

existuje právě jeden prvek $x \in M$ s vlastností $V(x)$.

Negace: $\overline{\forall x \in M: V(x)} = \exists x \in M: \overline{V(x)}$;
 $\overline{\exists x \in M: V(x)} = \forall x \in M: \overline{V(x)}$.

Složené kvantifikované výroky: $\forall x \in M \exists y \in N: V(x,y)$.

Příklad.

$\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{N}: y > x$ (Archimédův princip).

1.3. Zobrazení množin.

Definice 1.1. Mějme dány neprázdné množiny X, Y nějakých prvků a množinu $D \subset X$. Jestliže každému $x \in D$ je přiřazen právě jeden prvek $y \in Y$ předpisem (pravidlem) f , říkáme tomuto přiřazení zobrazení - množiny D do množiny Y ,
- z množiny X do množiny Y ,

a značíme:

$$f: X \longrightarrow Y,$$

$$f: D \longrightarrow Y, \quad D \subset X;$$

$$f: x \mapsto y, \quad x \in D;$$

$$y = f(x), \quad x \in D;$$

$$(x,y) \in f, \quad x \in D, \quad y \in Y;$$

různé způsoby zápisu zobrazení f .

Prvek $x \in D$ nazýváme: vzor, argument, originál, (nezávisle) proměnná.

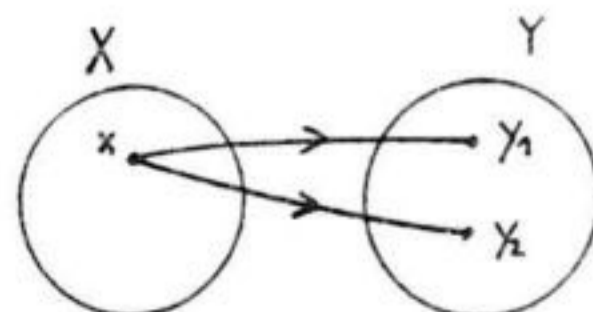
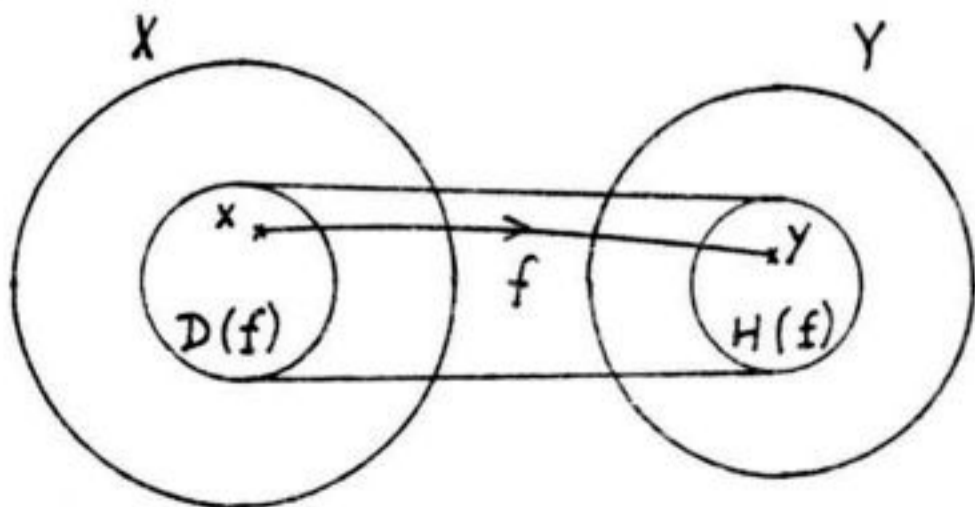
Prvek $y \in Y$ nazýváme: obraz, hodnota, závisle proměnná a značíme $f(x)$: hodnota zobrazení v argumentu x .

Definiční obor zobrazení f : $D \equiv D(f)$

... množina všech vzorů.

Obor hodnot zobrazení f : $H(f) \subset Y$ nebo $f(D) \equiv H(f)$

... množina všech obrazů.

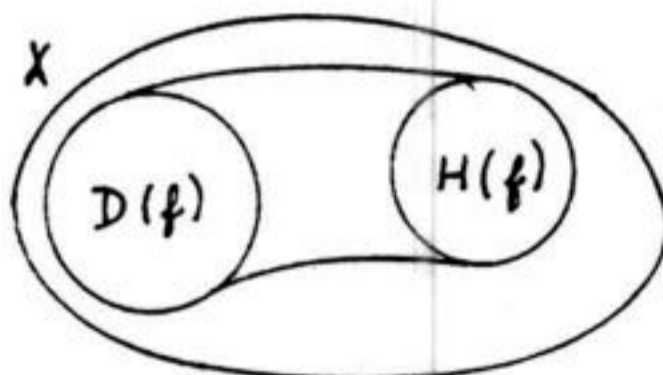


Vždy platí: $y_1 \neq y_2, y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$.

není zobrazení!

Poznámka. V různých situacích používáme pro zobrazení různých názvů: funkce, posloupnost, operátor, funkcionál, transformace, korespondence.

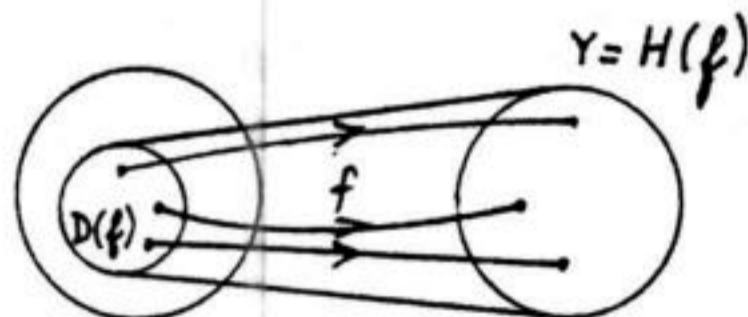
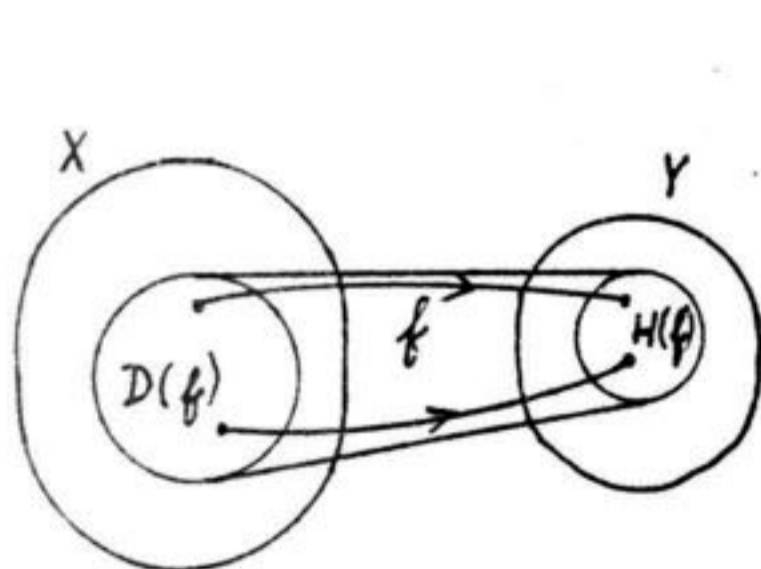
Poznámka. Zobrazení $f: X \rightarrow Y$, $x \in D \subset X$, v němž $Y \subset X$, resp. $H(f) \subset X$ se nazývá transformací množiny D v množině X .



Definice 1.2. Zobrazení f se nazývá surjektivní (surjekce), je-li $H(f) = Y$ (zobrazení "na").

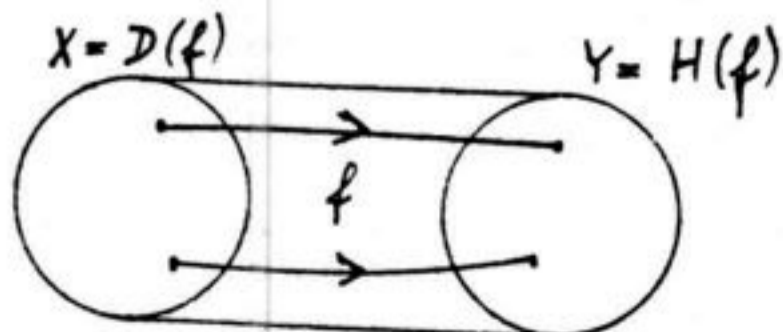
Surjekce X na Y : $\forall y \in Y \exists x \in X: f(x) = y$.

Definice 1.3. Zobrazení f se nazývá injektivní (injekce, prosté), jestliže pro každé dva vzory $x_1 \neq x_2$ je $f(x_1) \neq f(x_2)$ (tj. když platí: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$).



{ surjekce $D(f)$ na Y
 { prosté zobrazení z X na Y
 injekce z X na Y

surjekce $D(f)$ na $H(f)$ }
 injekce z X do Y }
 prosté zobrazení z X do Y }



injekce X na Y a surjekce X na Y

Věta 1.1. Je-li zobrazení $f: X \rightarrow Y$ injektivní na $H(f)$, tj. pro každé dva $x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \in D(f)$, je $f(x_1) \neq f(x_2)$; potom na množině $H(f)$ existuje zobrazení $f^{-1}: H(f) \rightarrow D(f)$, které každému $y = f(x) \in H(f)$ přiřazuje právě to $x \in D(f)$, kterému je zobrazením f přiřazena hodnota $f(x) = y$. Zobrazení f^{-1} se nazývá inverzním zobrazením k zobrazení f .

Příklad.

Je-li f injektivní do Y , tj. prosté z $X \rightarrow Y$, potom obecně na celé množině Y definovat inverzní zobrazení nelze! Pouze když f je injekce na Y !

Příklad.

$y = \sin x$; $D = \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$; zobrazení do $\langle 0, +\infty \rangle$ je injekce. Inverzní zobrazení na celém $\langle 0, +\infty \rangle$ definováno není!

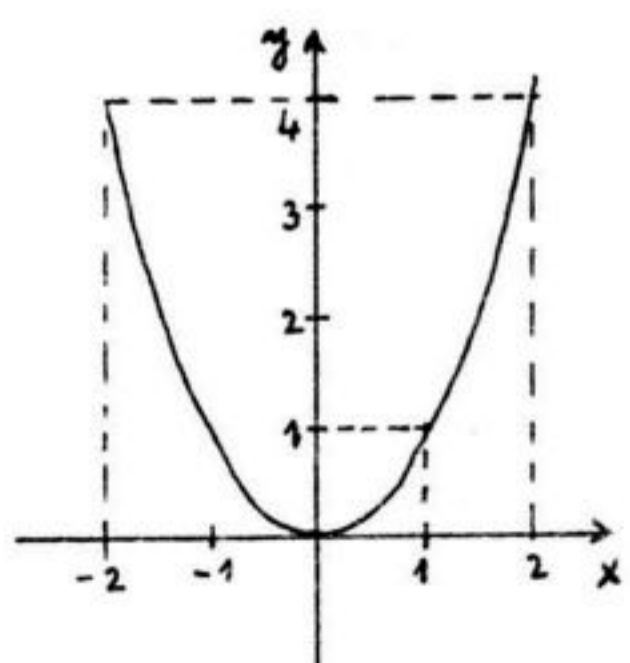
Definice 1.4. Zobrazení f se nazývá bijektivní (vzájemně jednoznačné), je-li injektivním (prostým) zobrazením množiny na množinu:

$surjekce \wedge injekce = bijekce$

tj.: 1. $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$,
 2. $\forall y \in Y \exists x \in X: f(x) = y$.

Příklad.

$$f: x \mapsto x^2 \Leftrightarrow y = x^2$$



pro $D(f) = \langle 1, 2 \rangle$:
 injekce $\langle 1, 2 \rangle$ do $\langle 0, +\infty \rangle$
 surjekce $\langle 1, 2 \rangle$ na $\langle 1, 4 \rangle$
 pro $D(f) = \langle -1, 1 \rangle$:
 surjekce $\langle -1, 1 \rangle$ na $\langle 0, 1 \rangle$
 není injektivní

Zobrazení $f: y = x^2$;
 $D(f) = \langle 1, 2 \rangle$
 $H(f) = \langle 1, 4 \rangle$ } je bijektivní,
 je prosté a je zobrazením "na".

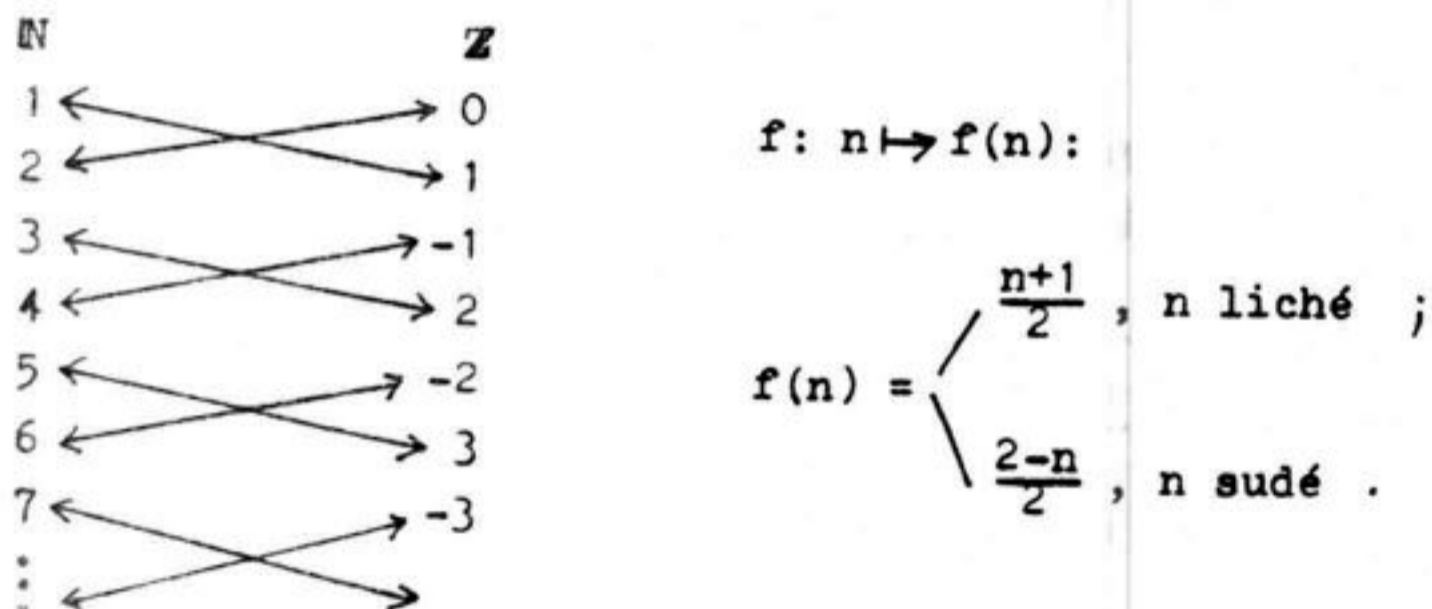
Poznámka. V matematické analýze studujeme převážně různé typy zobrazení!

1.4. Spočetné a nespočetné množiny.

Definice 1.5. Množiny A, B se nazývají ekvivalentní (značíme $A \sim B$), jestliže existuje bijektivní (vzájemně jednoznačné) zobrazení f takové, že $f: A \rightarrow B$. Říkáme také, že množiny A, B mají stejnou mohutnost a píšeme $m(A) = m(B)$ nebo $|A| = |B|$.

Příklad.

Mějme obor přirozených čísel $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ a množinu celých čísel $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$. Existuje (lze je sestavit) zobrazení f , které lichým číslům z \mathbb{N} přiřadí kladná celá čísla a sudým číslům z \mathbb{N} přiřadí záporná čísla a nulu takto:



Toto zobrazení je bijektivní (vzájemně jednoznačně zobrazuje množinu \mathbb{N} na množinu $\mathbb{Z} \Rightarrow m(\mathbb{N}) = m(\mathbb{Z})$).

Příklad.

Množiny $\langle 0, 1 \rangle \subset \mathbb{R}$, $\langle 0, 2 \rangle \subset \mathbb{R}$ mají stejnou mohutnost \equiv jsou ekvivalentní, neboť např. zobrazení $f: y = 2x$, $x \in \langle 0, 1 \rangle$, $y \in \langle 0, 2 \rangle$ zobrazuje tyto intervaly vzájemně jednoznačně na sebe.

Definice 1.6. Označíme $N_n = \{1, 2, \dots, n-1, n\}$; $m(N_n) = n$.
 Množina A se nazývá konečná, je-li $A \sim N_n$, tj. $m(A) = n$.
 Říkáme, že A má n prvků; pro $A = \emptyset$ klademe $m(A) = 0$.
 Množina B se nazývá spočetná, je-li $B \sim N$.
 Množina C se nazývá nespočetná, není-li ani konečná ani spočetná, tj. $C \not\sim N_n$, $C \not\sim N$, tj. je nekonečná a není spočetná.

Poznámka.

Konečná množina má tu vlastnost, že její vlastní podmnožina nemá stejnou mohutnost.

Nekonečné množiny tuto vlastnost nemají. Vlastní podmnožina nekonečné množiny může mít stejnou mohutnost.

Definice 1.7. Zobrazení $f: N \rightarrow B$, $N \equiv D(f)$, (B je množina nějakých prvků - např. čísel, bodů, vektorů, atd.) se nazývá posloupností (prvků z B).

Zápis tohoto zobrazení:

1. výpisem přiřazených prvků = obrazů

$$\{b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots\} \equiv H(f) ;$$

2. $\{b_n\}$ nebo $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$;

3. $f: n \mapsto b_n$ nebo $b_n = f(n)$, např. $b_n = \frac{n+1}{n}$;

4. obraz b_n se vyjádří pomocí předcházejících obrazů: rekurentně.

Obraz b_n přirozeného čísla n se nazývá n -tý člen posloupnosti.

Věta 1.2. Každá nekonečná podmnožina E spočetné množiny B je spočetná množina, tj. platí implikace

$$\left. \begin{array}{l} B \sim N, \\ E \subset B, \\ E \not\sim N_n \text{ pro žádné } n \in N \end{array} \right\} \Rightarrow E \sim N$$

Důkaz. Podle předpokladu je B spočetná množina, tj. $B \sim \mathbb{N}$. Existuje proto bijekce (vzájemně jednoznačné zobrazení) $f: \mathbb{N} \rightarrow B$, která každému $n \in \mathbb{N}$ přiřadí právě jedno $b_n \in B$:

$$B = \{ \underline{b_1}, \underline{b_2}, \underline{b_3}, \underline{b_4}, \underline{b_5}, \underline{b_6}, \underline{b_7}, \underline{b_8}, \dots \},$$

E je nekonečná podmnožina B (např. ozn. podtržením).
Nechť n_1 je nejmenší přirozené číslo takové, že $b_{n_1} \in E$.

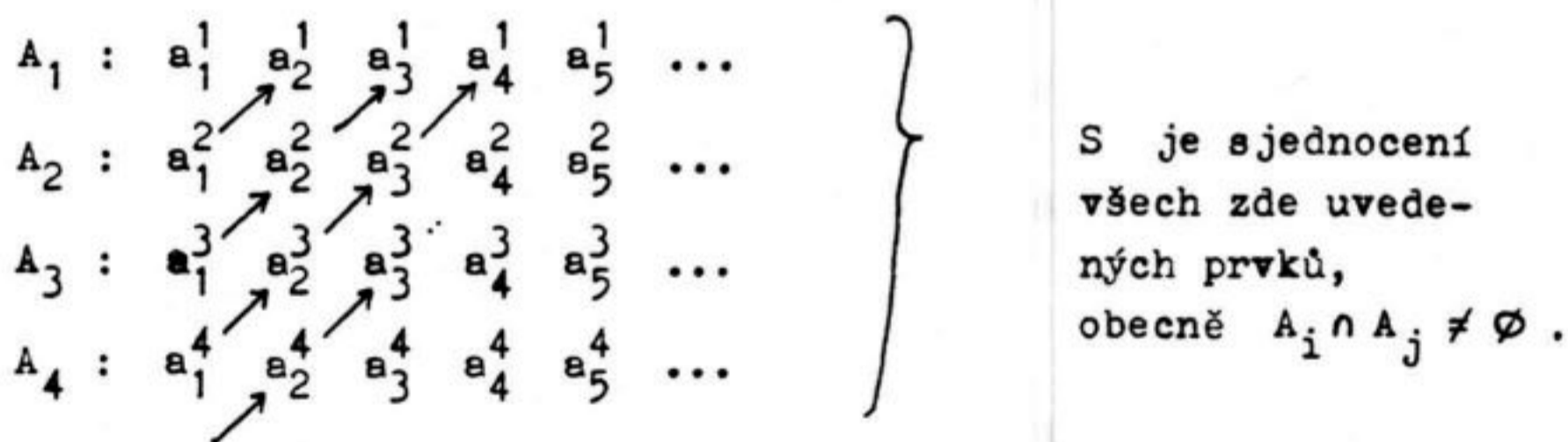
Nechť $n_2 > n_1$ je nejmenší takové přirozené číslo, že $b_{n_2} \in E, \dots$ atd. Takže $E = \{ b_{n_1}, b_{n_2}, \dots \} = \{ b_{n_k} \}$. Zobrazení $g: k \rightarrow b_{n_k}, k \in \mathbb{N}$ je bijektivní (vzájemně jednoznačné) $\Rightarrow E \sim \mathbb{N}$ (tj. E je spočetná množina).

Věta 1.3. Nechť $\{A_n\}$ je spočetný systém (posloupnost) spočetných množin. Potom množina $S = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ je spočetná.

Jinými slovy:

$$\text{Je-li } A_n \sim \mathbb{N} \text{ pro každé } n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \sim \mathbb{N}.$$

Důkaz. Prvky spočetných množin A_n jsou "očíslovány" takto:



Definujeme bijekci $f: \mathbb{N} \rightarrow S$ (očíslování prvků množiny S) pomocí šipek. Sestavíme posloupnost podle šipek

$$\{ a_1^1, a_1^2, a_2^1, a_1^3, a_2^2, a_3^1, a_4^1, \dots \};$$

přitom vynecháváme ty prvky, které se případně vyskytly už dříve (S je sjednocení). Proto S je (nekonečná) podmnožina spočetné množiny (prvky jsou očíslovány, ale některé

mohou být vynechány). Podle věty 1.2 je S spočetná množina.

Důsledek 1. Sjednocení konečného systému spočetných množin je spočetná množina.

Důsledek 2. Sjednocení spočetného systému konečných množin je spočetná množina *nebo konečná množina*.

Důsledek 3. Množina uspořádaných dvojic (trojic) přirozených čísel, tj. množina $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ($\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$), je spočetná množina (plyne z důsledku 1).

Důsledek 4. Množina racionálních čísel je spočetná: $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$ (plyne z důsledku 3, neboť $r \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow r = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$).

Definice 1.8. Nekonečným desetinným rozvojem nazýváme výraz

$$a = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots,$$

kde a_0 je libovolné *celé* číslo a každé a_i ($i = 1, 2, 3, \dots$) je jedna z číslic $0, 1, 2, \dots, 8, 9$.

Jestliže od určitého místa počínaje, jsou v desetinném rozvoji samé nuly, potom hovoříme o konečném desetinném rozvoji

$$a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_k 0 0 0 0 \dots \text{nebo}$$

$$a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_k .$$

Věta 1.4. Množina všech nekonečných desetinných rozvojų je nespočetná (tj. není ani konečná ani spočetná).

Důkaz sporem. Předpokládejme, že množina všech nekonečných desetinných rozvojų je spočetná a označme ji

$$\{x_1, x_2, x_3, x_4, \dots\}.$$

Takže:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_0^{(1)}, a_1^{(1)} a_2^{(1)} a_3^{(1)} \dots, \\ x_2 &= a_0^{(2)}, a_1^{(2)} a_2^{(2)} a_3^{(2)} \dots, \\ x_3 &= a_0^{(3)}, a_1^{(3)} a_2^{(3)} a_3^{(3)} \dots, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Vybereme desetinný rozvoj $x = b_0, b_1 b_2 b_3 \dots$ takto:

b_0 libovolné, $b_1 \neq a_1^{(1)}$, $b_2 \neq a_2^{(2)}$, $b_3 \neq a_3^{(3)}$, ... atd.

Odtud plyne, že x nepatří do posloupnosti $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$, tj. předpoklad, že všechny desetinné rozvoje lze seřadit do posloupnosti, je nepravdivý, což je spor s naším předpokladem.

1.5. Reálná čísla.

Definice 1.9. Říkáme, že každý nekonečný desetinný rozvoj reprezentuje reálné číslo.

Jestliže se ve vyjádření

$$x = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n a_{n+1} a_{n+2} \dots \text{(znaky "+" , "-" dále vynecháváme)}$$

od nějakého indexu členy nebo skupiny členů opakují, říkáme, že x je periodický desetinný rozvoj.

Definice 1.10.

Konečný nebo periodický desetinný rozvoj určuje racionální číslo. Nekonečný neperiodický desetinný rozvoj určuje iracionální číslo.

Příklad.

$$x = \pi = 3,1415926\dots$$

$$\underline{x}_4 = 3,1415$$

$$\overline{x}_4 = 3,1416 = 3,1415 + 10^{-4}$$

4-místná desetinná aproximace-dolní

"- " " " " -horní

Definice 1.11. Reálné číslo $x = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots$ je větší než reálné číslo $y = b_0, b_1 b_2 b_3 \dots$, značíme

$$x > y$$

jestliže existuje index n takový, že $\underline{x}_n > \bar{y}_n$.

Příklad.

$$x = 2,3636\overline{36}\dots, \quad y = 2,3636\overline{35}\dots$$

$$\text{Existuje } n = 6: \left. \begin{array}{l} \underline{x}_6 = 2,363636, \\ \bar{y}_6 = 2,363635, \end{array} \right\} \underline{x}_6 > \bar{y}_6$$

Tj. $x > y$.

Příklad.

$$x = 2,363999\dots, \quad y = 2,364000\dots$$

$$\left. \begin{array}{l} \underline{x}_1 = 2,3, \quad \bar{y}_1 = 2,4, \\ \underline{x}_2 = 2,36, \quad \bar{y}_2 = 2,37, \\ \underline{x}_3 = 2,363, \quad \bar{y}_3 = 2,364, \\ \underline{x}_4 = 2,3639, \quad \bar{y}_4 = 2,3640, \\ \underline{x}_5 = 2,36399, \quad \bar{y}_5 = 2,36400, \\ \dots \end{array} \right\} \text{vždy } \underline{x}_n < \bar{y}_n \quad \forall n$$

$$\left. \begin{array}{l} \bar{x}_1 = 2,4, \quad \underline{y}_1 = 2,3, \\ \bar{x}_2 = 2,37, \quad \underline{y}_2 = 2,36, \\ \bar{x}_3 = 2,364, \quad \underline{y}_3 = 2,364, \\ \bar{x}_4 = 2,364, \quad \underline{y}_4 = 2,3640, \\ \dots \end{array} \right\} \text{vždy } \bar{x}_n \geq \underline{y}_n \quad \forall n$$

Neexistuje n takové, pro které by platilo $\underline{x}_n > \bar{y}_n$ (nebo $\underline{y}_n > \bar{x}_n$), tj. $x = y$!

Uvedenou definicí 1.11 je v oboru reálných čísel zaveden vztah nerovnosti. Říkáme, že \mathbb{R} je uspořádaná množina.

Důsledek. Pro libovolné $a \in \mathbb{R}$ je $\underline{a}_n \leq a \leq \bar{a}_n$; pro dvě reálná čísla $x, y \in \mathbb{R}$ platí $x = y$, jestliže neplatí ani jeden ze vztahů $x > y$, $x < y$.

Věta 1.5. Množina reálných čísel je nespočetná. Množina iracionálních čísel je nespočetná.

Důkaz. Důsledek věty 1.4.

Věta 1.6. Existuje vzájemně jednoznačné (bijektivní) zobrazení oboru reálných čísel a bodů přímky. Přímka, na níž je toto zobrazení definováno, se nazývá reálná osa.

(Proto termíny "číslo x ", "bod x na reálné ose" mají stejný význam).

Důsledkem věty 1.6 je tvrzení, že pro libovolná dvě reálná čísla $x, y, x < y$, existuje (racionální) číslo $z \in \mathbb{R}$ ($z \in \mathbb{Q}$) takové, že $x < z < y$.

Poznámka. Algebraické operace s reálnými čísly lze zavést pomocí operací s racionálními, resp. přirozenými čísly.

Definice 1.12. Je-li v nějaké množině M definována soustava operací a vztahů, říkáme, že v M je definována algebraická struktura.

Struktura množiny \mathbb{R} .

Není účelné odvozovat všechny vlastnosti reálných čísel z definice 1.9 a vlastností racionálních čísel. Proto tyto vlastnosti vyslovíme a díváme se potom na tyto výroky jako na axiómy množiny \mathbb{R} .

Operace v \mathbb{R} :

V množině \mathbb{R} jsou definovány binární operace "+", ".": Každým dvěma číslům $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$ je přiřazeno jediné číslo označené $x + y \in \mathbb{R}$ a nazývané součtem čísel x, y a jediné číslo označené $x \cdot y \in \mathbb{R}$ a nazývané součinem čísel x, y a platí:

$$\begin{array}{l} A1: \forall x, y, z \in \mathbb{R}: (x+y)+z = x+(y+z) \\ \qquad \qquad \qquad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} A1: \forall x, y, z \in \mathbb{R}: (x+y)+z = x+(y+z) \\ \qquad \qquad \qquad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \end{array}} \right\} \text{asociativnost}$$

$$\begin{array}{l} A2: \forall x, y \in \mathbb{R}: \quad x+y = y+x \\ \qquad \qquad \qquad x \cdot y = y \cdot x \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} A2: \forall x, y \in \mathbb{R}: \quad x+y = y+x \\ \qquad \qquad \qquad x \cdot y = y \cdot x \end{array}} \right\} \text{komutativnost}$$

- A3: Existuje právě jedno číslo $0 \in \mathbb{R}$ takové, že $x + 0 = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (existence neutrálního prvku ke sčítání).
- A4: Existuje právě jedno číslo $1 \in \mathbb{R}$ takové, že $x \cdot 1 = x$ (existence neutrálního prvku k násobení).
- A5: Pro každé $x \in \mathbb{R}$ existuje právě jedno číslo označené $-x \in \mathbb{R}$ (opačné číslo) takové, že $x + (-x) = 0$.
- A6: Pro každé $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ existuje právě jedno číslo $y \in \mathbb{R}$ takové (tzv. převrácené číslo), že $x \cdot y = 1$; značíme $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$.
- A7: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: x(y+z) = xy + xz$ distributivnost

Skutečnost, že reálná čísla mají výše uvedené vlastnosti, vystihujeme rčením, že množina \mathbb{R} je vybavena algebraickou strukturou uvedeného typu.

Uspořádání v \mathbb{R} .

Můžeme-li prvky nějaké množiny "porovnávat", říkáme, že množina je uspořádaná, tj. že na množině je dána relace uspořádání.

- U1: $\forall x, y \in \mathbb{R}$ platí právě jeden ze vztahů $x < y$, $x = y$, $x > y$ (trichotomie).
- U2: Je-li $x < y \wedge y < z$, potom $x < z$ (tranzitivnost).
- U3: Je-li $x < y$, potom $x+z < y+z$, $\forall z \in \mathbb{R}$ (monotonie sčítání).
- U4: Je-li $x > 0 \wedge y > 0$, potom $x \cdot y > 0$ (monotonie násobení).

Poznámka. Místo $x < y$ píšeme také $y > x$; výrok $x < y \vee x = y$ zapisujeme $x \leq y$.

Poznámka. $0 < x < y$ je zápis konjunkce výroků $0 < x$, $0 < y$, $x < y$!

Souvislost \mathbb{R} .

Souvislost množiny \mathbb{R} je vystižena větou 1.6; znamená to, že množina \mathbb{R} nemá "mezery".

Souvislost množiny \mathbb{R} můžeme vyjádřit slovy takto:

"Neexistují dvě otevřené podmnožiny \mathbb{R} takové, že:

$$A \cup B = \mathbb{R} \wedge A \cap B = \emptyset ."$$
 (Viz 1.8).

1.6. Omezené podmnožiny \mathbb{R}

Nechť $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$ jsou nějaké množiny reálných čísel.

Definice 1.13.

1. Když $\exists c \in \mathbb{R}$, $\forall x \in A: x \leq c$, říkáme, že množina A je shora omezená.
2. Když $\exists d \in \mathbb{R}$, $\forall y \in B: d \leq y$, říkáme, že množina B je zdola omezená.
3. Množina C je omezená, je-li omezená zdola i shora.
4. Množina, která není omezená, se nazývá neomezená.

Příklady omezených množin

$$\left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \right\} \dots \text{omezená množina} \dots \left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty} .$$

$$\begin{array}{ll} \langle a, b \rangle = \{ x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b \} , & \text{uzavřený} \\ (a, b) = \{ x \in \mathbb{R} : a < x < b \} , & \text{otevřený} \\ \langle a, b) = \{ x \in \mathbb{R} : a \leq x < b \} , & \text{polouzavřený} \\ (a, b \rangle = \{ x \in \mathbb{R} : a < x \leq b \} . & \text{(polootvřený)} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \langle a, b \rangle \\ (a, b) \\ \langle a, b) \\ (a, b \rangle \end{array}} \right\} \text{interval}$$

Vnitřkem těchto intervalů je vždy interval (a, b) (viz 1.8).

Příklady neomezených množin.

$$\begin{array}{l} \langle a, +\infty) = \{ x \in \mathbb{R} : x \geq a \} , \\ (a, +\infty) = \{ x \in \mathbb{R} : x > a \} , \\ (-\infty, b) = \{ x \in \mathbb{R} : x < b \} , \\ (-\infty, b \rangle = \{ x \in \mathbb{R} : x \leq b \} , \\ (-\infty, +\infty) = \mathbb{R} . \end{array}$$

Definice 1.14. Nechť $A \subset \mathbb{R}$. Číslo $a \in A$ se nazývá minimem množiny A , platí-li $a \leq x \quad \forall x \in A$.
Číslo $b \in A$ nazýváme maximem množiny A , platí-li $x \leq b \quad \forall x \in A$. Značíme: $a = \min A$, $b = \max A$.

Příklad.

$\max \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right\} = 1$, $\min \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right\}$ neexistuje.

Definice 1.15. Absolutní hodnotou reálného čísla $x \in \mathbb{R}$ je největší z čísel x a $-x$, tj.

$$|x| = \max \{ x, -x \} .$$

Důsledek 1. Pro $x > 0$ je $|x| = x$,
 $x = 0$ je $|x| = 0$,
 $x < 0$ je $|x| = -x$.

Důsledek 2. Množina $C \subset \mathbb{R}$ je omezená, existuje-li číslo $c > 0$ takové, že $|x| \leq c \quad \forall x \in C$.

Příklady.

$(-5, 5) = \{ x \in \mathbb{R} : |x| < 5 \} \equiv \{ x \in \mathbb{R} : -5 < x < 5 \}$,
 $\langle -a, a \rangle = \{ x \in \mathbb{R} : |x| \leq a \} \equiv \{ x \in \mathbb{R} : -a \leq x \leq a \}$,
 $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \{ x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon \} \equiv \{ x \in \mathbb{R} : -\varepsilon < x - a < \varepsilon \}$,
 $\{ x \in \mathbb{R} : |x| > a \} = (-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$,
 $\{ x \in \mathbb{R} : |x| \geq a \} = (-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$.

Vlastnosti absolutní hodnoty:

1. $\forall a \in \mathbb{R} : |a| \geq a$,
2. $\forall a, b \in \mathbb{R} : |a+b| \leq |a| + |b|$ (trojúhelníková nerovnost) ,
3. $\forall a, b \in \mathbb{R} : ||a| - |b|| \leq |a-b| \leq |a| + |b|$,
číslo $|a-b|$ nazýváme vzdáleností bodů a, b na reálné ose,
4. $\forall a, b \in \mathbb{R} : |ab| = |a| \cdot |b|$,
5. $\forall a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0 : \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$,
6. $\forall a \in \mathbb{R} : |a|^2 = a^2$,
7. $\forall a \in \mathbb{R} : \sqrt{a^2} = |a|$.

1.7. Supremum a infimum číselné množiny.

Definice 1.16. Nechť A je neprázdňá podmnožina množiny \mathbb{R} .

a) Supremem množiny A je číslo $\sup A$, které má tyto vlastnosti:

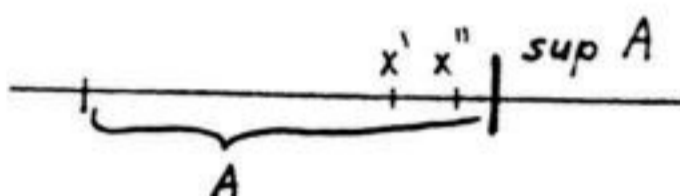
1. $\forall x \in A : x \leq \sup A$

(všechna čísla množiny A jsou menší než $\sup A$).

2. $\forall x' \in \mathbb{R} : x' < \sup A \Rightarrow \exists x'' \in A : x'' > x'$

(pro každé číslo x' menší než $\sup A$ existuje v množině A číslo x'' , které je větší než x').

(2'. $\forall \epsilon > 0 \exists x'' \in A : \sup A - \epsilon < x''$).



b) Infimem množiny A je číslo $\inf A$, které má tyto vlastnosti:

1. $\forall x \in A : x \geq \inf A$

(všechna čísla množiny A jsou větší než $\inf A$).

2. $\forall x' \in \mathbb{R} : x' > \inf A \Rightarrow \exists x'' \in A : x'' < x'$

(pro každé číslo x' větší než $\inf A$ existuje v množině A číslo x'' , které je menší než x').

(2'. $\forall \epsilon > 0 \exists x'' \in A : x'' < \inf A + \epsilon$).

Příklady.

$\sup (a,b) = b$, $\sup \langle a,b \rangle = b = \max \langle a,b \rangle$.

"Maximum je supremum, které je prvkem dané množiny."

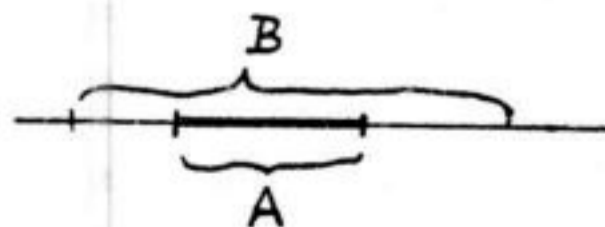
Věta 1.7. Nechť v množině $B \subset \mathbb{R}$ existuje $\max B$ (resp. $\min B$).
Potom $\max B = \sup B$ (resp. $\min B = \inf B$).

Důkaz plyne přímo z definice suprema.

Věta 1.8. a) $B \neq \emptyset \Rightarrow \sup B \geq \inf B$.

b) $A \subset B \Rightarrow \sup A \leq \sup B$,
 $\inf A \geq \inf B$.

c) Konečná množina má vždy maximum a minimum.



Definice 1.17. Množina uzavřených intervalů

$\{ \langle a_n, b_n \rangle, n \in \mathbb{N}, a_n \in \mathbb{R}, b_n \in \mathbb{R} \}$ se nazývá system do sebe vložených intervalů, platí-li pro každé $n \in \mathbb{N}$ inkluze

$$\langle a_{n+1}, b_{n+1} \rangle \subset \langle a_n, b_n \rangle .$$

Věta 1.9 (princip vložených intervalů). Libovolný systém do sebe vložených intervalů má neprázdný průnik.

Věta 1.10 (o existenci suprema a infima).

- a) Každá neprázdna shora omezená podmnožina množiny \mathbb{R} má právě jedno supremum.
- b) Každá neprázdna zdola omezená podmnožina množiny \mathbb{R} má právě jedno infimum.

Důkaz (hlavní myšlenka). Je-li množina A shora omezená, existuje celé číslo n_0 takové, že

1. $\forall x \in A : x < n_0 + 1$;
2. $\exists x' \in A : x' \geq n_0$.



Interval $\langle n_0, n_0+1 \rangle$ rozdělíme na deset stejných částí délky 10^{-1} . Existuje číslo n_1 ($0 \leq n_1 \leq 9$) takové, že

$$\langle n_0, n_1, n_0, n_1+10^{-1} \rangle \cap A \neq \emptyset$$

a přitom platí

1. $\forall x \in A : x < n_0, n_1+10^{-1}$;
2. $\exists x' \in A : x \geq n_0, n_1$.

Interval $\langle n_0, n_1, n_0, n_1+10^{-1} \rangle$ opět rozdělíme na 10 dílků délky 10^{-2} a vybereme číslo n_2 ($0 \leq n_2 \leq 9$) takové, že

$$\langle n_0, n_1 n_2, n_0, n_1 n_2 + 10^{-2} \rangle \cap A \neq \emptyset.$$

V tomto procesu pokračujeme a dostaneme nekonečný systém do sebe vložených intervalů. Podle věty 1.9 má tento systém neprázdný průnik. Vzhledem ke konstrukci výše uvedených intervalů je tento průnik jednobodová množina, kterou je reálné číslo

$$n_0, n_1 n_2 n_3 \dots$$

O tomto čísle je možné dokázat, že splňuje obě vlastnosti suprema dané definicí 1.16. Existence infima se dokáže analogicky.

Poznámka. Množina, která není shora omezená, nemá supremum - píšeme $\sup A = +\infty$. Množina, která není zdola omezená, nemá infimum - píšeme $\inf A = -\infty$. Podle definice 1.16 je $\sup \emptyset = -\infty$, $\inf \emptyset = +\infty$.

1.8. Topologie číselné osy.

Definice 1.18. Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$. Okolím (r-okolím) bodu x_0 rozumíme otevřený interval $(x_0 - r, x_0 + r)$ a značíme $U(x_0, r)$ nebo stručněji $U(x_0)$. Tj. r-okolí bodu x_0 je definováno takto:

$$U(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\}.$$

Dále už stručně

$$U^+(x_0, r) = \langle x_0, x_0 + r \rangle = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x - x_0 < r\} \dots \text{pravostranné okolí,}$$

$$U^-(x_0, r) = (x_0 - r, x_0] = \{x \in \mathbb{R} : -r < x - x_0 \leq 0\} \dots \text{levostranné okolí,}$$

$$P(x_0, r) = U(x_0, r) - \{x_0\} = (x_0 - r, x_0) \cup (x_0, x_0 + r) \dots \text{prstencové redukované okolí, "okolí bodu bez daného bodu",}$$

$$P^+(x_0, r) = (x_0, x_0 + r); \quad P^-(x_0, r) = (x_0 - r, x_0)$$

pravé levé

prstencové okolí.

Definice 1.19. Bod $a \in A \subset \mathbb{R}$ se nazývá vnitřním bodem množiny A , existuje-li okolí $U(a)$, pro které je $U(a) \subset A$. Množina vnitřních bodů množiny A se nazývá její vnitřek

a značí se $\text{int } A$. Bod $b \in \mathbb{R}$ se nazývá hraničním bodem množiny A , jestliže každé okolí $U(b)$ obsahuje jak body, které do A patří, tak body, které do A nepatří.

Množina hraničních bodů množiny A se nazývá hranicí množiny A a značí se ∂A .

Množina $\bar{A} = A \cup \partial A$ se nazývá uzávěr množiny A .

Množina se nazývá otevřená, jsou-li všechny její body vnitřní.

Množina A se nazývá uzavřená, je-li $A = \bar{A}$.

Bod x se nazývá hromadným bodem množiny A , jestliže v každém jeho okolí leží nekonečně mnoho bodů množiny A .

Bod $x \in A$, který není hromadným bodem množiny A , se nazývá izolovaným bodem množiny A .

Množina, jejíž všechny body jsou izolované, se nazývá diskrétní množina.

Poznámka. Systém okolí zavedených v definici 1.18 tvoří tzv. topologii reálné osy.

2. Posloupnosti reálných čísel.

2.1. Posloupnosti a operace s nimi.

Jistě vás napadlo, jakým způsobem lze "sečíst" nekonečně mnoho čísel:

$$\text{Např.: } \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^3}{2^3 3!} + \frac{\pi^5}{2^5 5!} - \frac{\pi^7}{2^7 7!} + \frac{\pi^9}{2^9 9!} - \dots = ? \quad (= 1)$$

1,570796327

0,924832229

1,004524855

0,9998431

1,000003541

Je tím součtem číslo 1? Pokud ano, pak bychom to měli nějak exaktně prověřit. Např. tím, že můžeme vzít tolik sčítanců, aby jejich součet byl k 1 blíže, než je předem zvolená tolerance.

Definice 2.1. Posloupností reálných čísel (= reálnou posloupností) je zobrazení, jehož definičním oborem je množina \mathbb{N} a oborem hodnot je nějaká podmnožina H množiny všech reálných čísel \mathbb{R}^1 ($H \subset \mathbb{R}^1$):

$$\mathbb{N} \rightarrow H : n \mapsto x_n .$$

Budeme zapisovat: $\{x_n\}$; $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$. V literatuře se pro označení posloupností v poslední době častěji používá symbolů (x_n) ; $(x_n)_{n=1}^{\infty}$; (x_1, x_2, x_3, \dots) . Číslo x_n se nazývá n-tý člen posloupnosti. Posloupnost je dána, je-li dáno pravidlo, které umožní stanovit libovolný člen posloupnosti.

Příklady.

$$x_n = n^n ; x_n = \frac{n}{n+1} ; x_n = (-1)^n ; \dots \text{ atd.}$$

$$x_n = 3x_{n-1}, x_1 = 5 ; x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, x_1 = 1, x_2 = 1 ; \dots \text{ atd.}$$

Poslední dvě rovnosti se nazývají rekurentní vztahy. Nalézt členy posloupnosti, která je dána rekurentním vztahem znamená řešit tzv. diferenční rovnici. V prvním případě diferenční rovnici prvního řádu, ve druhém případě diferenční rovnici druhého řádu.

Definice 2.2. (Operace s posloupnostmi). Nechť jsou dány posloupnosti $\{a_n\}, \{b_n\}$. Součtem, rozdílem, součinem, podílem daných posloupností nazýváme posloupnosti $\{a_n + b_n\}, \{a_n - b_n\}, \{a_n b_n\}, \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ (zde $b_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$). Číselný násobek: $\alpha\{a_n\} = \{\alpha a_n\}$; nulová posloupnost: $\{0, 0, 0, \dots\}$.

2.2. Omezené a monotónní posloupnosti.

Definice 2.3. Posloupnost $\{a_n\}$ se nazývá omezená, existuje-li číslo $K > 0$ takové, že platí

$$|a_n| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Posloupnost $\{b_n\}$ se nazývá shora (zdola) omezená, existuje-li číslo M (m) takové, že

$$b_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (b_n \geq m \quad \forall n \in \mathbb{N}).$$

Příklad.

Posloupnost $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ je omezená, neboť nerovnost $\left|\frac{n}{n+1}\right| \leq K$, tj. $\frac{n}{n+1} \leq K$ je splněna pro $n \geq \frac{-K}{K-1}$, když $K > 1$. Stačí volit např. $K = 2$ a uvedená nerovnost platí pro všechna n .

Příklad.

Posloupnost $\{2^n\}$ je neomezená, neboť nerovnost $2^n \leq K$ lze splnit pouze pro $n \leq \frac{\ln K}{\ln 2}$; tedy pro kladné K platí pouze pro konečný počet indexů n . Neexistuje tedy kladné číslo K takové, aby uvedená nerovnost platila pro všechna n .

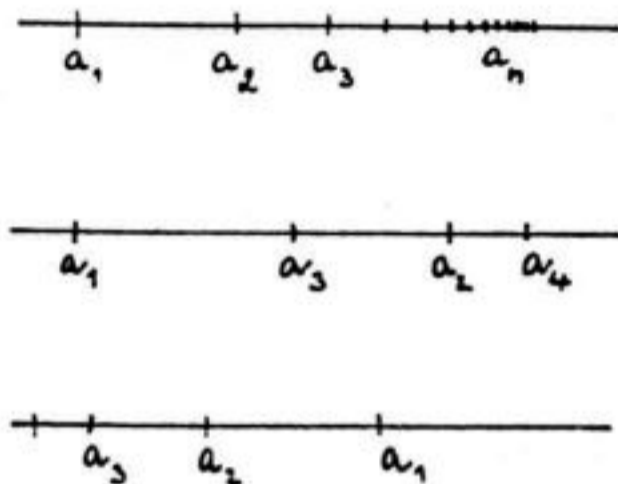
Definice 2.4. Posloupnost $\{a_n\}$ se nazývá neklesající, nerostoucí, } monotónní,
rostoucí, klesající, } ostře monotónní,

platí-li $a_{n+1} \equiv a_n$
 $a_{n+1} \equiv a_n$
 $a_{n+1} > a_n$
 $a_{n+1} < a_n$

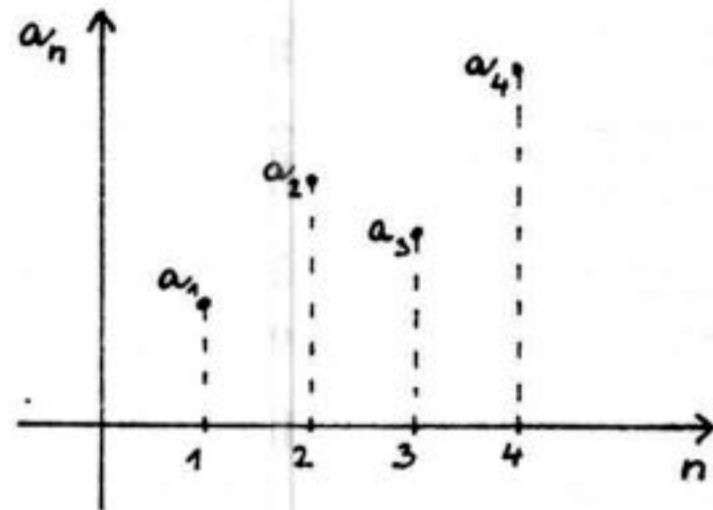
nelesající
neustupující
 $\forall n \in \mathbb{N}$
rostoucí
lesající

Geometrické znázornění posloupností.

1. způsob: na reálné ose



2. způsob: v souřadnicové soustavě v rovině



Definice 2.5. Nechť je dána posloupnost $\{a_n\}$ a nechť $\{k_1, k_2, k_3, \dots\}$ je ostře rostoucí posloupnost přirozených čísel (tj. $k_1 < k_2 < k_3 < \dots$). Potom posloupnost $\{a_{k_n}\}$ se nazývá posloupností vybranou z posloupnosti $\{a_n\}$.

Příklad.

$$\left. \begin{aligned} \{a_n\} &= \{1, 3, 0, 5, -1, 7, -2, \dots\} \\ \{a_{k_n}\} &= \{1, 3, 5, 7, \dots\} \\ \{b_{k_n}\} &= \{1, 0, -1, -2, \dots\} \\ \{c_{k_n}\} &= \{0, 5, -2, 9, \dots\} \end{aligned} \right\}$$

vybrané posloupnosti

Definice 2.6. Supremum (resp. infimum) posloupnosti $\{x_n\}$ nazýváme supremum (resp. infimum) množiny $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ a značíme $\sup \{x_n\}$ (resp. $\inf \{x_n\}$).

Je-li posloupnost $\{a_n\}$ shora neomezená, píšeme $\sup \{a_n\} = +\infty$.

Je-li posloupnost $\{a_n\}$ zdole neomezená, píšeme $\inf \{a_n\} = -\infty$.

Příklad.

$$\{x_n\} = \{n^2\} = \{1, 4, 9, 16, \dots\}; \quad \sup \{x_n\} = +\infty, \\ \inf \{x_n\} = 1.$$

Věta 2.1. Z každé reálné posloupnosti lze vybrat monotónní posloupnost (tj. buď rostoucí nebo klesající).

2.3. Konvergentní posloupnosti

Definice 2.7. Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní v \mathbb{R} , má-li tuto vlastnost:

$$\exists a \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}: n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon.$$

Tzn.: existuje číslo $a \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje index $n_0 = n_0(\varepsilon)$ takový, že pro všechna $n > n_0$ (tj. pro "skoro všechna n ") platí nerovnost $|a_n - a| < \varepsilon$ (tj. $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$).

Číslo a se nazývá limita dané posloupnosti a píšeme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a; \quad \text{stručně: } a_n \rightarrow a.$$

Říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ konverguje k číslu a .

Poznámka. Je-li číslo a limitou, potom skoro všechny členy posloupnosti leží v ε -okolí $U(a, \varepsilon)$ čísla a , tj.

$$\forall n > n_0(\varepsilon) \quad \text{je } a_n \in U(a, \varepsilon).$$

Příklad.

$$\text{Posloupnost } \left\{ \frac{n}{n+1} \right\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{100}{101}, \dots, \frac{1000}{1001}, \dots \right\}$$

se zdá být konvergentní k číslu 1, neboť skoro všechny členy jsou blízko čísla 1.

Prověříme, zda nerovnost $\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon$ je splněna.

$$\text{Úprava: } \left| \frac{-1}{n+1} \right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

Označíme-li $n_0(\varepsilon)$ celou část čísla $\frac{1}{\varepsilon} - 1$ ($\varepsilon = 0,1; 1; 100; 1000$) potom pro každé $n > n_0$ je $\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon$, ε je libovolné kladné.

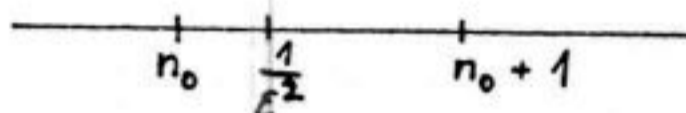
Příklad.

Dokažme, že $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, tj. že posloupnost $\left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \right\}$ konverguje k nule.

Zvolme libovolné $\varepsilon > 0$ a uvažujme nerovnost

$$\left| \frac{1}{\sqrt{n}} \right| < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon^2} .$$

Označíme n_0 celou část čísla $\frac{1}{\varepsilon^2}$.



Závěr. Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje n_0 takové, že pro $n > n_0$ je také $n > \frac{1}{\varepsilon^2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$.

Příklad.

Geometrické posloupnost $\{q^n\}$, $q \in \mathbb{R}$ je konvergentní právě tehdy, když $|q| < 1$ nebo $q = 1$.

Platí:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \begin{cases} 0, & |q| < 1, \\ 1, & q = 1, \\ \text{neexistuje,} & \text{když } q = -1 \text{ nebo } |q| > 1. \end{cases}$$

Příklad.

Posloupnosti $\{2^n\}$, $\{(-2)^n\}$, ... nejsou konvergentní.

Kdyby např. existovalo číslo $a > 0$ jako limita posloupnosti $\{2^n\}$, muselo by platit

$$-\varepsilon < 2^n - a < \varepsilon, \text{ pro libovolné } \varepsilon > 0 \text{ a pro skoro všechna } n.$$

Tedy

$$\begin{aligned} 2^n &< \varepsilon + a, \\ n \ln 2 &< \ln(\varepsilon + a), \\ n &< \frac{\ln(\varepsilon + a)}{\ln 2}. \end{aligned}$$

Je vidět, že tato nerovnost platí pouze pro konečný počet členů posloupnosti.

Poznámka. Jaké posloupnosti mají následující vlastnosti:

1. $\exists a \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \forall n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$; $\{a, a, a, \dots\}$,
2. $\exists a \in \mathbb{R} \exists \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$; $\{\text{omez. posl.}\}$,
3. číslo b není limitou posloupnosti $\{a_n\}$?

2.4. Vlastnosti konvergentních posloupností

Věta 2.2 (jednoznačnost limity). Každá konvergentní posloupnost má právě jednu limitu. (Každé posloupnost má nejvýše jednu limitu; tj. jednu nebo žádnou).

Důkaz (sporem). Existence limity je zaručena předpokladem konvergence. Dokážeme tedy pouze jednoznačnost. Předpokládáme, že existují aspoň dvě různé limity a, b :

$$\lim a_n = a \implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_1 \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon, n > n_1 ;$$

$$\lim a_n = b \neq a \implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_2 \in \mathbb{N} : |a_n - b| < \varepsilon, n > n_2 .$$

(totéž)

Vezmeme $n > \max(n_1, n_2) = n_0$ a $\varepsilon = \frac{1}{2} |b-a|$.

Platí

$$|b-a| = |b-a_n + a_n - a| \leq |a_n - b| + |a_n - a| < \frac{1}{2} |b-a| + \frac{1}{2} |b-a| ,$$

tj.

$$|b-a| < |b-a| , \text{ což je spor.}$$

Věta 2.3 (konvergence a omezenost).

a) Každá konvergentní posloupnost je omezená.

b) (Bolzano-Weierstrass): Z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost.

Důkaz. a) Z předpokladu plyne:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \text{ pro } n > n_0 .$$

Vezmeme-li $K = \max \{ |a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0}|, |a| + \varepsilon \}$,

potom platí

$$-K < a_n < K .$$

b) Je-li posloupnost $\{a_n\}$ omezená, potom existuje uzavřený interval $I_1 = \langle \alpha_1, \beta_1 \rangle$ takový, že $a_n \in I_1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Rozdělíme I_1 na polovinu. Označíme I_2 tu (uzavřenou) část I_1 , která obsahuje nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{a_n\}$ (aspoň jedna část tuto vlastnost má). V tomto procesu pokračujeme a dostaneme systém $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$ do sebe vložených

intervalů délky $\beta_k - \alpha_k = \frac{\beta_1 - \alpha_1}{2^{k-1}}$. V každém intervalu I_k vybereme jeden člen posloupnosti $\{a_n\}$ a označíme jej $a_{n_k}, n_{k+1} > n_k$, tj. $\alpha_k \leq a_{n_k} \leq \beta_k$. Společný bod všech do sebe vložených intervalů označíme a . Potom $|a_{n_k} - a| \leq |\beta_k - \alpha_k| = \frac{\beta_1 - \alpha_1}{2^{k-1}} \rightarrow 0$,
 $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = a$.

Věta 2.4 (o nerovnosti limit). Předpokládáme:

- (1) $\{a_n\}, \{b_n\}$ jsou konvergentní posloupnosti;
- (2) platí nerovnost $a_n \leq b_n$ pro skoro všechna n .

Potom $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$.

(Pozor! Je-li $a_n < b_n$, potom v limitě může být rovnost).

Důkaz (hlavní myšlenka - sporem). Nechť $a > b$; $a = \lim a_n$, $b = \lim b_n$. Z předpokladů plyne platnost nerovností

$$\begin{aligned} a - \varepsilon &< a_n < a + \varepsilon, \\ b - \varepsilon &< b_n < b + \varepsilon, \\ a_n &\leq b_n. \end{aligned}$$

Tj. $a - \varepsilon < a_n \leq b_n < b + \varepsilon$

musí platit pro každé $\varepsilon > 0$, a tedy i pro $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$.

Potom $a - \frac{a-b}{2} < a_n \leq b_n < b + \frac{a-b}{2}$, a tedy $\frac{a+b}{2} < \frac{a+b}{2}$, což je spor.

Věta 2.5 (o sevření). Mějme posloupnosti $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ a předpokládáme

- (1) $a_n \leq b_n \leq c_n$ pro skoro všechna n ,
- (2) $\{a_n\}, \{c_n\}$ konvergují ke stejné limitě a .

Potom posloupnost $\{b_n\}$ také konverguje a je

$$\lim b_n = \lim a_n = \lim c_n = a.$$

Důkaz. Nechť a je limita posloupností $\{a_n\}$, $\{c_n\}$, tj.
 $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ pro libovolné $\varepsilon > 0$ a pro $\forall n > n_1$;
 $a - \varepsilon < c_n < a + \varepsilon$ pro libovolné $\varepsilon > 0$ a pro $\forall n > n_2$.
 Tedy $a - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < a + \varepsilon \quad \forall n > \max \{n_1, n_2\}$,
 $-\varepsilon < b_n - a < \varepsilon$ pro libovolné $\varepsilon > 0$ a
 $\forall n > \max \{n_1, n_2\}$.

Poznámka. Z věty 2.5 speciálně plyne následující tvrzení:
 Je-li $|b_n| \leq |c_n| \quad \forall n > n_0$ a $\lim c_n = 0$, potom také
 $\lim b_n = 0$.

Příklad.

Dokážeme, že $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Zřejmou rovnost $(1 + \sqrt[n]{n-1})^n = n$
 upravíme pomocí binomické formule ($n > 1$)
 $n = [1 + (\sqrt[n]{n-1})]^n = 1 + n(\sqrt[n]{n-1}) + \frac{n(n-1)}{2} (\sqrt[n]{n-1})^2 + \dots + (\sqrt[n]{n-1})^n$.
 Protože $\sqrt[n]{n} > 1$, je $n-1 > \frac{n(n-1)}{2} (\sqrt[n]{n-1})^2$, tj. $|\sqrt[n]{n-1}| < \sqrt{\frac{2}{n}}$.
 Protože $\lim \sqrt{\frac{2}{n}} = 0$, platí $\lim \sqrt[n]{n} = 1$.

Věta 2.6 (algebra limit). Nechť reálné posloupnosti $\{a_n\}$,
 $\{b_n\}$ jsou konvergentní a označíme $a = \lim a_n$, $b = \lim b_n$.
 Potom i posloupnosti $\{a_n + b_n\}$; $\{a_n - b_n\}$; $\{a_n b_n\}$;

$\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\}$, $b_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, jsou konvergentní a platí:

- (1) $\lim \alpha a_n = \alpha a$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
- (2) $\lim (a_n \pm b_n) = a \pm b$,
- (3) $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, $b \neq 0$!
- (4) $\lim a_n b_n = ab$.

Důkaz. Dokážeme (4). Ostatní důkazy viz literatura.

Z konvergence vyplývá omezenost (věta 2.3 (a)), tj. existuje
 $K > 0$ takové, že $|a_n| < K$; $|b_n| < K$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Dále jistě

platí:

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leq |a_n| |b_n - b| + |b| |a_n - a| .$$

Z předpokladu vyplývá, že musí platit nerovnosti

$$|b_n - b| < \varepsilon , |a_n - a| < \varepsilon \quad \text{pro skoro všechna } n \text{ a pro li-} \\ \text{bovolné } \varepsilon .$$

Proto $|a_n b_n - ab| < K \cdot \varepsilon + |b| \varepsilon$ platí pro skoro všechna n .

Poznámka (význam předpokladu v tvrzení (3)). $\lim \frac{1}{n^2} = 0$;
 $\lim \frac{1}{n} = 0$; $\left\{ \frac{1}{n^2} \right\}$, $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$ konvergují. Ale

$$\left\{ \frac{1}{\frac{1}{n^2}} \right\} = \left\{ \frac{n^2}{1} \right\} = \{n\} \quad \text{nekonverguje!}$$

Poznámka. Dokažte: Je-li $\{a_n\}$ konvergentní k nule, tj. $\lim a_n = 0$, a $\{b_n\}$ je (pouze) omezená, potom $\{a_n b_n\}$ konverguje k nule: $\lim a_n b_n = 0$. Např. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n^n}{n} = 0$.

Příklad.

Dokážeme: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, $a > 0$.

Užijeme větu o sevření: Platí jistě nerovnost pro $a > 1$:

$$1 < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{n} \quad \text{pro } n > a \quad (\text{pro skoro všechna } n), \\ \lim \sqrt[n]{n} = 1 \quad (\text{dokázali jsme}).$$

Pro $0 < a < 1$ je $\frac{1}{a} = b > 1$, tj.

$$1 = \lim \sqrt[n]{b} = \lim \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \lim \frac{1}{\sqrt[n]{a}} .$$

Z věty 2.6 (3) plyne: $\lim \sqrt[n]{a} = 1$.

Věta 2.7. Nechť $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ jsou konvergentní a platí $\lim a_n > \lim b_n$. Potom pro skoro všechna n platí $a_n > b_n$.

Důkaz. Podobný důkazu věty 2.4.

Důsledek. Je-li $\lim a_n > 0$, potom $a_n > 0$ pro skoro všechna n .

Definice 2.8. Reálná posloupnost $\{x_n\}$ se nazývá fundamentální (cauchyovská), má-li tuto vlastnost:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N}: n > n_0, m > n_0 \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Věta 2.8. Je-li posloupnost $\{x_n\}$ fundamentální, potom je omezená.

Důkaz. Analogický důkazu věty 2.3 a).

2.5. Kritéria konvergence.

Věta 2.9 (Bolzanovo-Cauchyovo kritérium; nutná a postačující podmínka konvergence).

1. verze: Posloupnost $\{a_n\}$ reálných čísel je konvergentní v \mathbb{R} právě tehdy, když je fundamentální (cauchyovská).

2. verze: Posloupnost $\{a_n\}$ reálných čísel je konvergentní v \mathbb{R} právě tehdy, když

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N}: n > n_0, m > n_0 \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Důkaz. a) Platí $\left. \begin{array}{l} |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, n > n_0(\varepsilon) \\ |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}, m > n_0(\varepsilon) \end{array} \right\}$ tj. $\forall m, n > n_0$

$$\text{platí } |a_m - a_n| = |a_m - a + a - a_n| \leq |a_m - a| + |a_n - a| < \varepsilon,$$

tj. posloupnost $\{a_n\}$ je fundamentální.

b) Je-li $\{a_n\}$ fundamentální, potom podle věty 2.8 je omezená a lze z ní vybrat konvergentní posloupnost $\{a_{n_k}\}$, tj. $\lim a_{n_k} = a$ (věta 2.3 b)).

Platí tedy nerovnosti: $|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$, pro $n_k > n_0$,
 $|a_n - a_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2}$ (fundamentální).

$$\text{Odtud } |a_n - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \varepsilon .$$

Poznámka (ekvivalentní formulace). $m = n+p$, $p \in \mathbb{N}$:
 $\forall n > n_0 \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \text{platí } |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon .$

Věta 2.10 (Konvergence monotónní posloupnosti)
 (Postačující podmínka konvergence)

Je-li posloupnost $\{a_n\}$ omezená a monotónní, potom je konvergentní: $\lim a_n = \begin{cases} \sup\{a_n\} , & \text{pro neklesající,} \\ \inf\{a_n\} , & \text{pro nerostoucí.} \end{cases}$

Důkaz. Pro omezenou posloupnost existuje supremum, tj.

$\forall \varepsilon > 0$, existuje člen a_{n_0} takový, že $\sup\{a_n\} - \varepsilon < a_{n_0} \leq \sup\{a_n\}$. Je-li neklesající, potom $\sup\{a_n\} - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n$, pro $n > n_0$. Tedy $\sup\{a_n\} - a_n < \varepsilon$, tj. $|\sup\{a_n\} - a_n| < \varepsilon$.

Analogicky pro nerostoucí posloupnost.

Důsledek. Monotónní posloupnost je konvergentní právě tehdy, když je omezená.

Pro omezenou posloupnost $\{a_n\}$ sestrojíme dvě monotónní posloupnosti $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ předpisem

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \inf\{a_n, a_{n+1}, \dots\} && \dots \text{ neklesající,} \\ \beta_n &= \sup\{a_n, a_{n+1}, \dots\} && \dots \text{ nerostoucí.} \end{aligned}$$

Posloupnosti $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ jsou tedy omezené a monotónní a podle věty 2.10 jsou konvergentní. Jejich limity označujeme

$$\begin{aligned} \lim \alpha_n &= \underline{\lim} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf a_n = \underline{a} , && \text{tzv. } \underline{\text{dolní limita}} \\ &&& \text{(limes inferior)} \\ \lim \beta_n &= \overline{\lim} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup a_n = \overline{a} , && \text{tzv. } \overline{\text{horní limita}} \\ &&& \text{(limes superior)} \end{aligned}$$

Platí zřejmě

$$\alpha_n \leq a_n \leq \beta_n \quad \text{pro každou omezenou posloupnost } \{a_n\} .$$

Je tedy vždy splněna podmínka

$$\underline{\lim} a_n \leq \overline{\lim} a_n \quad (\underline{a} \leq \overline{a}) .$$

Příklad.

$$\{a_n\} = \left\{ 2, 1, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{k+1}{k}, \frac{1}{k}, \dots \right\} ;$$

$$\{\alpha_n\}: \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0, \dots \Rightarrow \underline{\lim} a_n = 0 ,$$

$$\{\beta_n\}: \beta_1 = 2, \beta_2 = \frac{3}{2}, \beta_3 = \frac{3}{2}, \beta_4 = \frac{4}{3}, \dots \Rightarrow \overline{\lim} a_n = 1 .$$

$$\sup a_n = 2 ; \inf a_n = 0 .$$

Příklad.

$$\{b_n\} = \left\{ -1, 0, \frac{1}{2}, -1, 0, \frac{2}{3}, -1, 0, \frac{3}{4}, -1, 0, \frac{4}{5}, \dots \right\} ;$$

$$\{\alpha_n\}: \alpha_1 = -1, \alpha_2 = -1, \alpha_3 = -1, \dots \Rightarrow \underline{\lim} b_n = -1 ,$$

$$\{\beta_n\}: \beta_1 = 1, \beta_2 = 1, \dots \Rightarrow \overline{\lim} b_n = 1 .$$

Věta 2.11. Omezená posloupnost $\{a_n\}$ je konvergentní právě tehdy, když $\underline{a} = \overline{a}$.

Důkaz. a) Když $a_n \rightarrow a$, dokáže se, že $\underline{a} = a$ z vlastnosti infima a $\overline{a} = a$ z vlastnosti suprema.

b) Podle věty o sevření.

důkazy více psít

Důsledek. Posloupnost $\{a_n\}$ konverguje k číslu a právě tehdy, když k tomuto číslu konverguje každá z ní vybraná posloupnost.

Limita konvergentní vybrané posloupnosti se nazývá částečná limita.

Horní limita je největší částečná limita.

Dolní limita je nejmenší částečná limita.

Příklad (důležitý).

Posloupnost $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}$ je konvergentní a její limitou je číslo $e \approx 2,718281828459045\dots$.



K důkazu se uži je věta 2.10. Dokáže se, že daná posloupnost je omezená a rostoucí.

Omezenost:

$$\begin{aligned} x_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2} \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \frac{1}{n^3} + \dots + \\ &\quad + \frac{n(n-1)\dots 2 \cdot 1}{n!} \frac{1}{n^n} = \\ &= 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \dots \\ &\quad \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) . \end{aligned}$$

Členy v závorkách jsou menší než 1 a kladné, tj.

$$x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!} .$$

Protože pro $k > 1$ je $k! \geq 2^{k-1}$, dostaneme (zesílenou) nerovnost

$$x_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < 3$$

(omezenost shora).

Růst: $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{9}{4}$, $x_3 = \frac{64}{27}$, \dots ; $(n+1)^2 - 1$

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{[(n+2)n]^{n+1} \cdot \frac{1}{n}}{[(n+1)^{n+1}]^2 \cdot \frac{1}{n+1}} = \frac{(n^2 + 2n)^{n+1}}{[(n+1)^2]^{n+1}} \cdot \frac{n+1}{n} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} . \end{aligned}$$

Podle Bernoulliovy nerovnosti je $\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} > 1 - (n+1) \frac{1}{(n+1)^2}$,

tj.

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} > \left[1 - \frac{1}{(n+1)}\right] \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{n+1-1}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} = 1 .$$

2.6. Divergentní posloupnosti.

Definice 2.9. a) Posloupnost $\{a_n\}$ je divergentní, jestliže není konvergentní.

b) Posloupnost $\{a_n\}$ diverguje k $+\infty$, když $\forall E > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}: n > n_0 \Rightarrow a_n > E$.

c) Posloupnost $\{a_n\}$ diverguje k $-\infty$, když $\forall E > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}: n > n_0 \Rightarrow a_n < -E$.

Označujeme: b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ nebo $a_n \rightarrow +\infty$,

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$ nebo $a_n \rightarrow -\infty$.

Poznámka. Příkladem divergentní posloupnosti je posloupnost neomezená. Ovšem i omezené posloupnosti mohou být divergentní, např. $\{\sin n\}$, $\{(-1)^n\}$ atd.

Věta 2.12. a) Když $\{a_n\}$ konverguje k nule, potom $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ diverguje k $\begin{cases} +\infty, & \text{když } a_n > 0, \forall n; \\ -\infty, & \text{když } a_n < 0, \forall n. \end{cases}$ ($a_n \rightarrow 0 \Rightarrow \left|\frac{1}{a_n}\right| \rightarrow +\infty$).

b) Když $\{b_n\}$ diverguje k $\begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$, potom $\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$ konverguje k 0 ($b_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$). ($|b_n| \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{1}{b_n} \rightarrow 0$).

Důkaz. a) $|a_n| < \varepsilon, n > n_0 \Rightarrow \frac{1}{|a_n|} > \frac{1}{\varepsilon}$.

Věta 2.13 (algebra divergentních posloupností).

a) Když $a_n \rightarrow +\infty, b_n \rightarrow +\infty \Rightarrow a_n + b_n \rightarrow +\infty$,
 $a_n b_n \rightarrow +\infty$,
 o $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}, \{a_n - b_n\}$ nelze nic tvrdit.

b) Když $a_n \rightarrow +\infty, b_n \rightarrow -\infty \Rightarrow a_n - b_n \rightarrow +\infty$,
 $a_n b_n \rightarrow -\infty$,
 o $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}, \{a_n + b_n\}$ nelze nic tvrdit.

$$\begin{aligned}
 \text{c) } a_n \rightarrow +\infty, b_n \rightarrow b &\Rightarrow a_n + b_n \rightarrow +\infty, \\
 &a_n b_n \rightarrow +\infty, \text{ když } b > 0, \\
 &a_n b_n \rightarrow -\infty, \text{ když } b < 0. \\
 \text{d) } a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow \pm\infty &\Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0; \\
 a_n \rightarrow a \neq 0, b_n \rightarrow 0 &\Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \rightarrow \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases} \text{ podle znamének} \\
 &\quad a, b_n.
 \end{aligned}$$

Poznámka. Když $a_n \rightarrow 0, b_n \rightarrow 0$, nelze o $\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\}$ nic tvrdit (mohou nastat různé možnosti). Říkáme, že posloupnost $\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\}$ je neurčitý výraz typu $\frac{0}{0}$. Analogicky když $a_n \rightarrow \pm\infty, b_n \rightarrow \pm\infty$, pak $\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\}$ je neurčitý výraz typu $\frac{\infty}{\infty}$. Podobně když $a_n \rightarrow 0, b_n \rightarrow \infty$, pak $\left\{ a_n^{b_n} \right\}$ je neurčitý výraz typu 0^0 . Když $a_n \rightarrow 1, b_n \rightarrow \infty$, pak $\left\{ a_n^{b_n} \right\}$ je neurčitý výraz 1^∞ .

Věta 2.14. Je-li $a_n \rightarrow +\infty$ a $\{b_n\}$ je omezená posloupnost, potom $a_n + b_n \rightarrow +\infty$,

$$a_n b_n \rightarrow \begin{cases} +\infty, & b_n \geq c > 0, \\ -\infty, & b_n \leq -c < 0. \end{cases}$$

3. Číselné řady.

3.1. Konvergentní řady.

Definice 3.1. Mějme posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ reálných čísel.

Symbol $a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ se nazývá nekonečná řada, čísla a_n se nazývají členy řady a posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{+\infty}$ definovaná předpisem

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

se nazývá posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Definice 3.2. Řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ je konvergentní, je-li příslušná posloupnost částečných součtů $\{s_n\}_{n=1}^{+\infty}$ konvergentní.

V opačném případě je řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ divergentní.

Je-li řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergentní, potom $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = s$ se nazývá součet (konvergentní) řady. (Píšeme $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = s$). Divergentní řada nemá součet!

Příklad.

Mějme řadu $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Zde $s_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$.

Protože $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ (rozklad na částečné zlomky), potom

$$s_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Odtud $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 1$.

Závěr: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ je konvergentní a její součet je 1.

Poznámka. Řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverguje k $+\infty$ ($-\infty$), když její posloupnost $\{s_n\}$ diverguje k $+\infty$ ($-\infty$). Ostatní divergentní řady "oscilují".

Příklad.

Mějme řadu $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$.

Zde $s_1 = 1,$

$s_2 = 0,$

$s_3 = 1,$

$s_4 = 0,$

\vdots

$s_n = \frac{1+(-1)^{n+1}}{2},$

$\left. \begin{array}{l} \{s_n\} \text{ diverguje, neboť vybrané posloup-} \\ \text{nosti sudých a lichých členů konvergují} \\ \text{každá k jiné limitě.} \end{array} \right\}$

Příklad.

Důležitá je (nekonečná) geometrická řada:

$$1 + q + q^2 + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1}.$$

$$\text{Zde } s_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \begin{cases} \frac{1-q^n}{1-q}, & q \neq 1, \\ n, & q = 1. \end{cases}$$

Když $|q| < 1$, potom $\lim q^n = 0 \Rightarrow \lim s_n = \frac{1}{1-q}$;
 když $|q| \geq 1$, řada diverguje; když $q \geq 1$, řada diverguje
 k $+\infty$.

Věta 3.1. Jsou-li řady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ konvergentní, potom řada $\sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, je také konvergentní a její součet je $\alpha s_a + \beta s_b$.

Důkaz. Posloupnost částečných součtů řady $\sum (\alpha a_n + \beta b_n)$ je lineární kombinací posloupností částečných součtů řad $\sum a_n$, $\sum b_n$.

Poznámka. Pro $\alpha = 1$, $\beta = 1$: $\sum (a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n$.

Slovy: "Součet součtu (řad) se rovná součtu součtů". Platí pouze pro konvergentní řady!

3.2. Kritéria konvergence.

Věta 3.2 (Bolzanovo-Cauchyovo kritérium). Řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ je konvergentní právě tehdy, když

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall p \in \mathbb{N}: n > n_0 \Rightarrow |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon .$$

Důkaz. Posloupnost $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ je konvergentní právě tehdy, když nerovnost $|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$ je splněna pro každé $\varepsilon > 0$, pro libovolné $p \in \mathbb{N}$ a pro skoro všechna n (věta 2.9) a je

$$s_{n+p} - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p} .$$

Poznámka. Řada $\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \dots$ se nazývá zbytek řady $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ příslušný n -tému členu. Pro konvergentní řady je $\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k = s - s_n$.

Důsledek (nutná podmínka konvergence). Je-li řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergentní, potom (nutně) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

Důkaz. B.C.-kritérium (věta 3.2) implikuje (pro $p = 1$) platnost nerovnosti:

$$|a_{n+1}| < \varepsilon \quad \text{pro } n > n_0 .$$

Příklad.

Řada $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ (tzv. harmonická řada) splňuje nutnou podmínku konvergence, ale je divergentní. Kdyby konvergovala, musela by splňovat B.-C. kriterium i pro $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $p = n_0$:

$$\left| \frac{1}{n_0+1} + \frac{1}{n_0+2} + \dots + \frac{1}{2n_0} \right| < \frac{1}{2} .$$

Avšak

$$\frac{1}{n_0+1} \geq \frac{1}{2n_0}, \quad \frac{1}{n_0+2} \geq \frac{1}{2n_0}, \quad \dots, \quad \frac{1}{2n_0} \geq \frac{1}{2n_0} ;$$

takže určitě platí

$$\left| \frac{1}{2n_0} + \frac{1}{2n_0} + \dots + \frac{1}{2n_0} \right| < \frac{1}{2}, \quad \text{tj. } \frac{n_0}{2n_0} < \frac{1}{2}, \quad \text{spor!}$$

3.3. Kritéria konvergence pro řady s nezápornými členy.

Máme na mysli řady, u nichž $a_n \geq 0$, $n > n_0$.

Věta 3.3. Je-li posloupnost $\{s_n\}$ řady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ s nezápornými členy shora omezená, potom je řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergentní.

Důkaz. Protože $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, $s_{n+1} = a_1 + \dots + a_n + a_{n+1}$, potom $s_{n+1} \geq s_n$ a tedy $\{s_n\}$ je neklesající a shora omezená posloupnost. Podle věty 2.10 je $\{s_n\}$ konvergentní.

Věta 3.4 (srovnávací kritérium). Nechť $\sum a_n$, $\sum b_n$ jsou řady s nezápornými členy a pro skoro všechna n platí nerovnost

$$0 \leq a_n \leq b_n.$$

Potom: a) když konverguje $\sum b_n$, konverguje také $\sum a_n$;
b) když diverguje $\sum a_n$, diverguje také $\sum b_n$.

Důkaz. a) Částečné součty s_n řady $\sum a_n$ jsou omezeny součtem $b = \sum b_n$. Podle věty 3.3 pak odtud plyne tvrzení.

b) Kdyby $\sum b_n$ konvergovala, musela by konvergovat také $\sum a_n$.

Poznámka. Řada $\sum b_n$ se nazývá majorantou řady $\sum a_n$. Řada $\sum a_n$ se nazývá minorantou řady $\sum b_n$.

Příklad. Mějme řadu $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. Zřejmě platí $n^2 > n(n-1)$, tj. $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}$, $n > 1$. Řada $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots$ konverguje (viz příklad z odst. 3.1), proto podle srovnávacího kritéria konverguje i řada $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Příklad. Mějme řadu $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$. Protože $n > \sqrt[3]{n}$, platí $\frac{1}{n} < \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, a řada $\sum \frac{1}{n}$ (minoranta) diverguje (harmonická řada). Diverguje proto i řada $\sum \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

Věta 3.5 (d'Alembertovo kritérium). Obecné:

1. Existuje-li číslo $q : 0 < q < 1$, že od určitého členu počínaje (tj. existuje n_0 tak, že pro $n \geq n_0$), platí nerovnost

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1, \text{ potom řada } \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ konverguje.}$$

2. Jestliže od určitého členu počínaje (tj. pro $n \geq n_0$) platí

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1, \text{ potom řada } \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ diverguje.}$$

Limitní: Jestliže $\left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\}$ konverguje a

1. když $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, potom řada $\sum a_n$ konverguje,

2. když $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, potom řada $\sum a_n$ diverguje,

3. když $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, nelze rozhodnout o konvergenci řady

$\sum a_n$ podle limitního d'Alembertova kritéria.

Důkaz. 1. Platí-li $a_{n+1} \leq qa_n$ pro $n \geq n_0$, sestrojíme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $b_1 = a_{n_0}$, $b_2 = a_{n_0+1}$, ... atd. a platí $b_n \leq b_1 q^{n-1}$.

Protože $0 < q < 1$, je řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_1 q^{n-1}$ konvergentní majoran-

tou řady $\sum b_n$. Proto i řada $\sum a_n$ je konvergentní, neboť konečný počet členů a_n , pro které uvedená nerovnost neplatí, neovlivní konvergenci této řady.

2. Platí-li $a_{n+1} \geq a_n$, pak členy řady $\sum a_n$ rostou od určitého členu počínaje, nemůže být proto splněna nutná podmínka konvergence: $\lim a_n = 0$. Řada $\sum a_n$ proto diverguje.

Limitní kritérium je jednoduchým důsledkem obecného kritéria:

existuje-li $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, potom pro dostatečně velké n platí: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$. Existuje-li $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, existuje index n_0 tak, že $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ pro $n \geq n_0$.

Příklad.

Rozhodneme o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$, $a > 0$. Platí:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{a}{n+1}; \text{ nerovnost } \frac{a}{n+1} \leq \frac{1}{2} < 1 \text{ je splněna pro}$$

$n > 2a$. Proto podle obecného d'Alembertova kritéria řada konverguje. Limitním kritériem rozhodneme také: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n+1} = 0$.

Věta 3.6 (Cauchyovo kritérium).

Obecné:

1. Existuje-li číslo $q: 0 < q < 1$, že od určitého členu počínaje (tj. existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro $n > n_0$) platí nerovnost

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1, \text{ potom řada } \sum a_n \text{ konverguje.}$$

2. Jestliže od určitého členu počínaje (tj. pro $n \geq n_0$) platí

$$\sqrt[n]{a_n} \geq 1, \text{ potom řada } \sum a_n \text{ diverguje.}$$

Limitní: Jestliže $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ konverguje a

1. když $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1$, potom řada $\sum a_n$ konverguje;

2. když $\lim \sqrt[n]{a_n} > 1$, potom řada $\sum a_n$ diverguje;

3. když $\lim \sqrt[n]{a_n} = 1$, potom nelze rozhodnout o konvergenci řady pomocí limitního Cauchyova kritéria.

Důkaz. Z předpokladu plyne nerovnost $a_n \leq q^n < 1$ a srovnávací kritérium zaručuje konvergenci. Na druhé straně nerovnost $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, tj. $a_n \geq 1$ vylučuje konvergenci, neboť není splněna nutná podmínka konvergence.

Příklad (poučný!).

Rozhodněme o konvergenci řady

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^6} + \dots + \frac{1}{2^{2n-1}} + \frac{1}{3^{2n}} + \dots$$

d'Alembertovo kritérium:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \frac{a_{\text{liché}+1}}{a_{\text{liché}}} = \frac{\frac{1}{3^{2n}}}{\frac{1}{2^{2n+1}}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2n-1} \cdot \frac{1}{3} < 1 \text{ (pouze pro } n \text{ liché),} \\ \frac{a_{\text{sudé}+1}}{a_{\text{sudé}}} = \frac{\frac{1}{2^{2n+1}}}{\frac{1}{3^{2n}}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2n} \cdot \frac{1}{2} > 1 \text{ (pouze pro } n \text{ sudé).} \end{cases}$$

Tedy d'Alembertovo kritérium nelze užít. Limitní také ne, protože $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ neexistuje.

Cauchyovo kritérium:

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{pro } n \text{ sudé,} \\ \frac{1}{2} & \text{pro } n \text{ liché,} \end{cases} \quad \left. \vphantom{\sqrt[n]{a_n}} \right\} \text{tj. určitě platí } \sqrt[n]{a_n} \leq \frac{1}{2} < 1, \text{ pro všechna } n.$$

Limitní kritérium nelze užít, neboť $\lim \sqrt[n]{a_n}$ neexistuje:

$$\left\{ \sqrt[n]{a_n} \right\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right\}, \quad \text{tj. } \underline{\lim} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{3}, \\ \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}.$$

Poznámka. Početně je d'Alembertovo kritérium jednodušší, ale Cauchyovo je obecnější v tom smyslu, že jím lze rozhodnout o konvergenci ve všech případech rozhodnutelných d'Alembertovým kritériem a navíc i v případech, které d'Alembertovým kritériem rozhodnutelné nejsou.

3.4. Alternující řady. Absolutně konvergentní řady.

Definice 3.3. Řadu $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \dots$, $a_n > 0$,

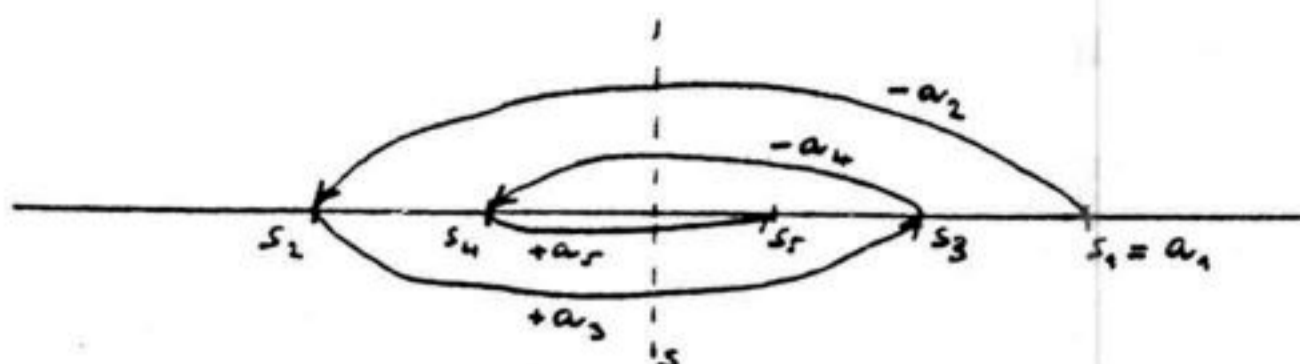
nazýváme alternující řadou.

Věta 3.7 (Leibnizovo kritérium). Nechť platí $a_n \geq a_{n+1} > 0$ a je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Potom alternující řada $\sum (-1)^{n+1} a_n$ (resp. $\sum (-1)^n a_n$) konverguje.

Důkaz. Označíme $\{s_n\}$ posloupnost částečných součtů alternující řady a vyšetříme dvě podposloupnosti: $\{s_{2n}\}$, $\{s_{2n+1}\}$.

$$s_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - \dots + a_{2n-1} - a_{2n} \quad (\text{součet sudého počtu členů řady}),$$

$$s_{2n+1} = a_1 - a_2 + a_3 - \dots + a_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1} \quad (\text{součet lichého počtu členů řady}).$$



Každý sudý člen s_{2n} je omezen shora libovolným lichým členem s_{2k-1} , tj. $\{s_{2n}\}$ je neklesající a omezená shora. Je tedy konvergentní a platí $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_{2n} = s$.

Každý lichý člen s_{2n-1} je omezen zdola libovolným sudým členem s_{2n} , tj. $\{s_{2n-1}\}$ je nerostoucí a omezená zdola. Je tedy konvergentní a $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_{2n-1} = s'$.

Protože $s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, platí $s' = s + 0$, tj. $s' = s$.

Poznámka (odhad součtu alternujících řady). Z předchozího náčrtku je zřejmé, že

$$s_{2n} \leq s \leq s_{2n+1}$$

a také, že

$$|s_n - s| \leq a_{n+1}.$$

Tedy součet s můžeme stanovit přibližně. Aproximací součtu s je číslo s_n , přičemž chyba této aproximace nebude větší než a_{n+1} .

Definice 3.4. Řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ s libovolnými členy je absolutně konvergentní, konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$.

Příklad. Řada $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots$ je alternující konvergentní řada (Leibnizovo kritérium), která není absolutně konvergentní.

Věta 3.8. Konverguje-li řada $\sum |a_n|$, konverguje také řada $\sum a_n$.

Důkaz. $S_n = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$; $\lim S_n = S$;

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n ,$$

tj. $|s_n| \leq S_n$.

Podle Bolzanova-Cauchyova kritéria platí: $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$,
 $n > n_0$, tj.

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| \right| < \varepsilon . \text{ Avšak } \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| , |s_{n+p} - s_n| \leq |S_{n+p} - S_n| .$$

Tedy řada $\sum a_n$ také konverguje.

Jiné vyjádření čísla e .

Mějme řadu $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$. Pro $n \geq 1$

je $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$. Řada $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ konverguje (geometrická řada

s kvocientem $q = \frac{1}{2}$) ; podle srovnávacího kritéria konverguje

také $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$. Když $s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$, potom

$\lim s_n = e$ a s_n je rostoucí posloupnost.

Platí $0 < e - s_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$. Zbytek řady odhadneme následující-

cím způsobem

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots = \frac{1}{n!} \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots \right] \leq \frac{1}{n!} \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \dots \right] = \\ &= \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{n} . \end{aligned}$$

Dokážeme, že číslo e je iracionální. Předpokládejme sporem, že

$e = \frac{p}{q}$, kde p, q jsou nesoudělná, celá čísla, $q > 1$. Potom

$$0 < \frac{p}{q} - s_q < \frac{1}{q!q} , \text{ tj. } 0 < p(q-1)! - s_q \cdot q! < \frac{1}{q} .$$

Tato nerovnost však nemůže platit, neboť čísla $p(q-1)!$, $s_q \cdot q$ jsou celá čísla a jejich rozdíl je také celé číslo a $\frac{1}{q} < 1$.

Poznámka. Přerovnáním členů absolutně konvergentní řady se součet nemění. Toto tvrzení pro neabsolutně konvergentní řady neplatí, jak ukazuje následující příklad.

Příklad.

Mějme alternující řadu

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots = s .$$

Tato řada konverguje (podle Leibnizova kritéria) a její součet je s . Zřejmě platí $\frac{1}{2} \leq s \leq 1$. Pak

$$\frac{s}{2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots .$$

Takže

$$\begin{aligned} s + \frac{s}{2} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots = \\ &= 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} \dots = s . \end{aligned}$$

Tedy $\frac{3}{2}s = s$, odkud $s = 0$. To je však ve sporu s nerovností $s \geq \frac{1}{2}$.

4. Reálné funkce jedné reálné proměnné.

4.1. Základní pojmy.

Definice 4.1. Nechť $D \subset \mathbb{R}$. Zobrazení $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ nazýváme reálnou funkcí jedné reálné proměnné (každému prvku množiny D je přiřazeno právě jedno číslo z množiny \mathbb{R}). Prvkům množiny D říkáme: vzory, argumenty, (nezávisle) proměnné a značíme $x, t, s, \dots \in D$; jejich obrazy: y, z, u, \dots jsou tzv. funkční hodnoty. Množina argumentů se nazývá definiční obor funkce ...
... $D = D(f)$; množina obrazů se nazývá obor hodnot ... $H = H(f)$.
Značíme: $y = f(x), x \in D$ nebo $f: x \mapsto f(x), x \in D$,
 $z = \varphi(t), t \in I, \text{ tj. } I = D(\varphi)$.

Grafem funkce f rozumíme množinu dvojic $[x, f(x)], x \in D$, a znázorňujeme v souřadnicových systémech! Říkáme, že funkce je dána (zadána), je-li dáno přiřazení (pravidlo) f a definiční obor $D(f)$.

Nejběžnější způsoby zadání funkce:

- a) analyticky \equiv matematickým výrazem (formulí) $\left\{ \begin{array}{l} \text{explicitně;} \\ \text{implicitně;} \end{array} \right.$
- b) graficky - tj. grafem (diagram, "charakteristika", ...);
- c) tabulkou: jsou dány dvojice $[x_i, f(x_i)]$ pro jistý výběr bodů $x_i \in D(f)$.

Poznámka. Někdy (výjimečně!) nevypisujeme definiční obor, ale pouze udáme přiřazení formulí. Potom definičním oborem rozumíme množinu všech čísel z \mathbb{R} , pro která má daný výraz smysl.

Příklad.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \sqrt{x+1} \quad \Rightarrow \quad D(f) = \langle -1, +\infty \rangle, \\ g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}} \quad \Rightarrow \quad D(g) = (-1, +\infty). \end{array} \right\}$$

Restrikce (zúžení) funkce f na podmnožinu: Je-li $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, potom funkci $g: D_1 \rightarrow \mathbb{R}$, kde

1. $D_1 \subset D$,
2. $g(x) = f(x), x \in D_1$,

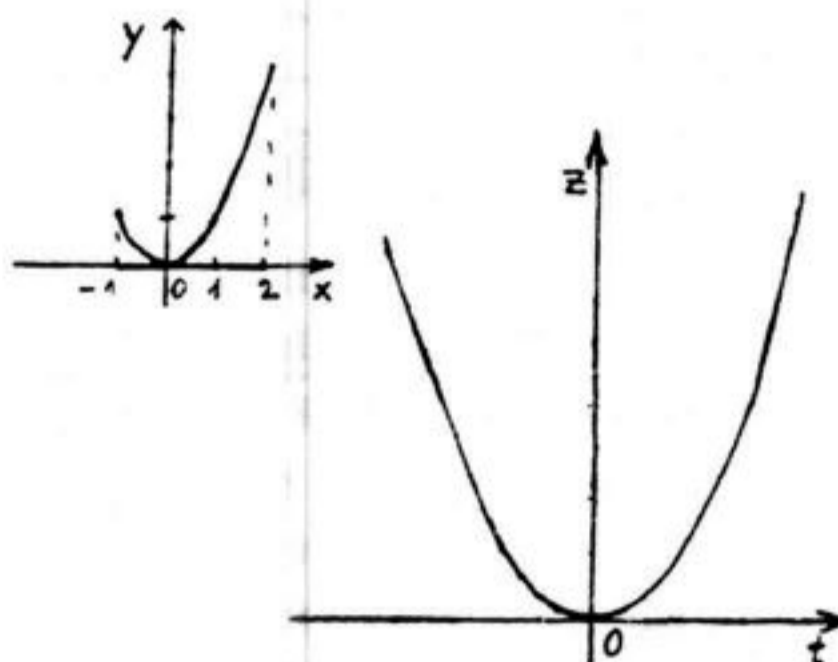
nazýváme restrikcí funkce f .

Příklad.

Funkce $y = x^2$, $x \in \langle -1, 2 \rangle$
je restrikcí funkce

$$z = t^2; t \in \mathbb{R}$$

$$(y = x^2, x \in \mathbb{R})$$



Příklady funkcí

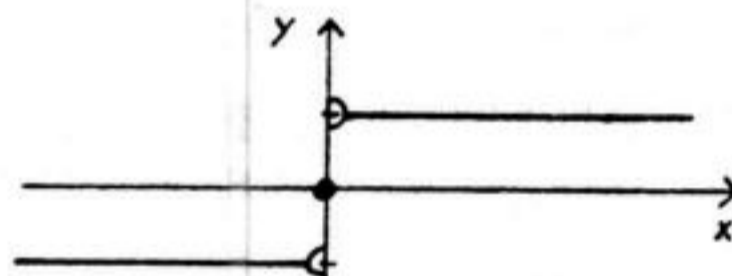
1. Mocninná funkce: $f: x \rightarrow x^n$, $x \in \mathbb{R}$; $n \in \mathbb{N}$ (pevné),
resp.: $y = x^n$, resp. $f(x) = x^n$.

$$H(f) = \begin{cases} \langle 0, +\infty \rangle & \text{pro } n \text{ sudé;} \\ (-\infty, +\infty) & \text{pro } n \text{ liché.} \end{cases}$$

2. Znaménková funkce:

$$f(x) = \text{sgn } x, x \in \mathbb{R},$$

$$\text{sgn } x = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

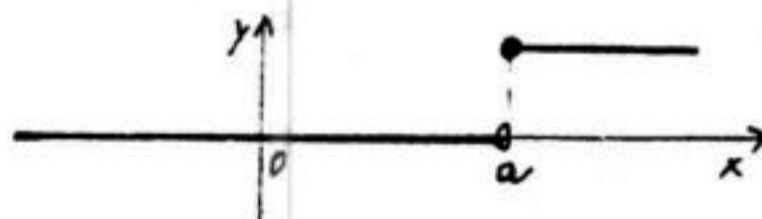
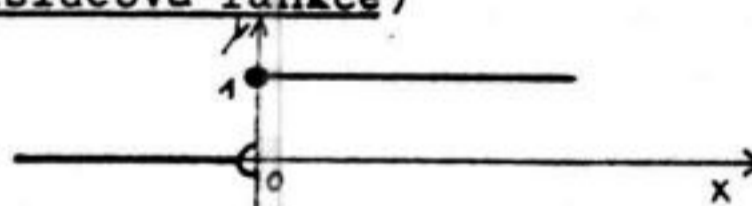


3. Funkce jednotkového skoku (Heavisideova funkce)

$$\gamma_0(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} D = \mathbb{R};$$

s posunutým argumentem:

$$\gamma_0(x-a) = \begin{cases} 1, & x \geq a; \\ 0, & x < a. \end{cases}$$



4. Funkce intervalového impulsu (impulsní funkce)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ 1, & a \leq x \leq b; \\ 0, & x > b. \end{cases}$$

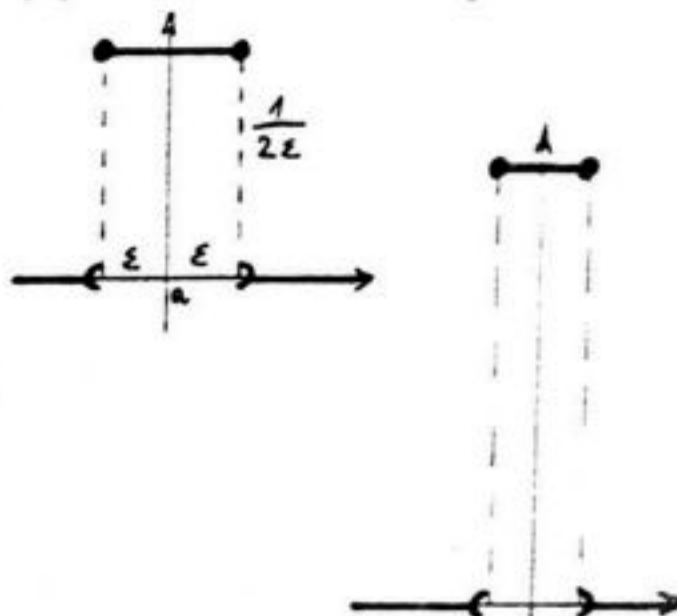
$$(f(x) = \gamma_0(x-a) - \gamma_0(x-b)).$$



5. Funkce "bodového" impulsu (bodové síly, bodového náboje)

Pro dané $a \in \mathbb{R}$ a zvolené $\varepsilon > 0$:

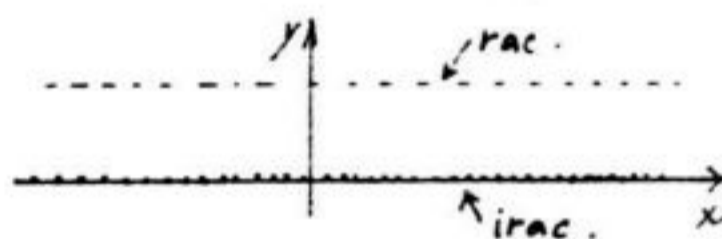
$$\delta_\varepsilon(x-a) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon}, & x \in \langle a-\varepsilon, a+\varepsilon \rangle; \\ 0, & x \notin \langle a-\varepsilon, a+\varepsilon \rangle. \end{cases}$$



Limita posloupnosti funkcí $\{\delta_{\varepsilon_n}(x-a)\}$,
pro libovolnou volbu $\{\varepsilon_n\}$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$
(např. $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$) je tzv. Diracova di-
stribuce, resp. je vyjádřením (konkre-
tizací) Diracovy distribuce.

6. Dirichletova funkce:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{pro } x \text{ iracionální;} \\ 1, & \text{pro } x \text{ racionální.} \end{cases}$$



Definice 4.2 (rovnost funkcí). Funkce f a g jsou si rovny

- ($f = g$), když
1. $D(f) = D(g)$,
 2. $f(x) = g(x) \quad \forall x \in D$.

Příklad. Vyjasnit rovnost funkcí:

$$\left. \begin{aligned} f_1(x) &= x^2, & x &\in (-\infty, +\infty) \\ f_2(z) &= z^2, & z &\in (0, +\infty) \\ f_3(y) &= y^2, & y &\in \langle 0, +\infty \rangle \\ f_4(t) &= t^2, & t &\in (0, +\infty) \end{aligned} \right\} \text{ pouze } f_2 = f_4.$$

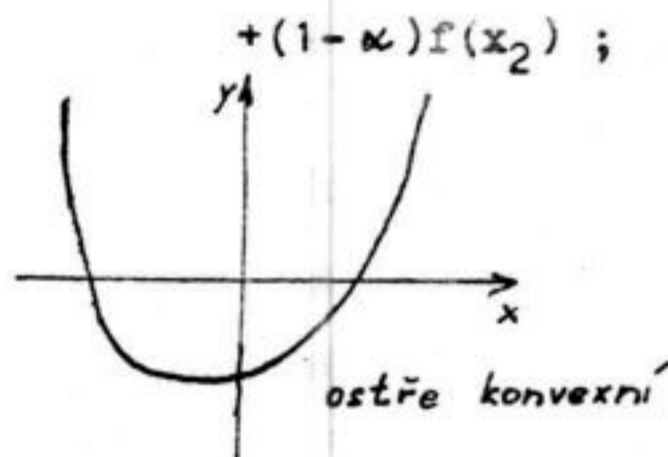
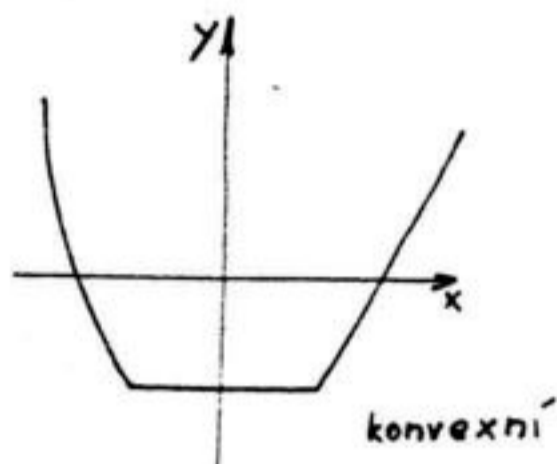
Definice 4.3 (některé třídy funkcí). Nechť je dána funkce

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ a D obsahuje alespoň dva body. Funkce f se nazývá:

1. rostoucí v D , když: $\forall x_1, x_2 \in D: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$;
2. klesající v D , když: $\forall x_1, x_2 \in D: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$;
3. nerostoucí v D , když: $\forall x_1, x_2 \in D: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$;
4. neklesající v D , když: $\forall x_1, x_2 \in D: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$;
5. ostře monotonní, když je buď rostoucí nebo klesající; monoton-
ní, když je buď neklesající nebo nerostoucí;
6. konvexní na intervalu D , když:
 $\forall x_1, x_2 \in D: f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2), \alpha \in \langle 0, 1 \rangle$;

ostře konvexní na intervalu D , když:

$$\forall x_1, x_2 \in D, x_1 \neq x_2, \alpha \in (0,1) : f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) < \alpha f(x_1) +$$

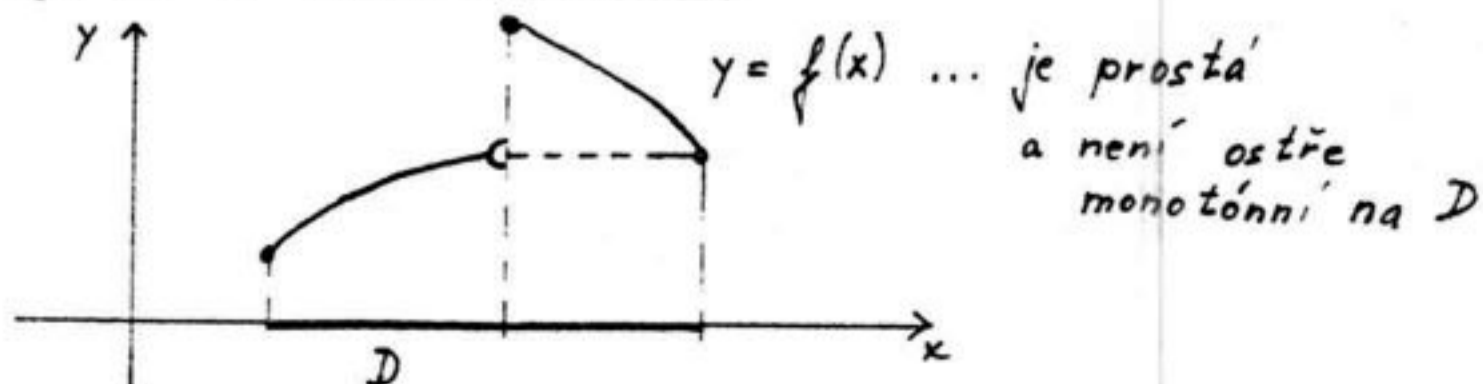


7. konkávní (ostře konkávní) na intervalu D : ... platí obrácené nerovnosti;
8. sudá na symetrické množině D (tj. když $x \in D \Rightarrow -x \in D$), když $f(-x) = f(x)$;
9. lichá na symetrické množině D , když $f(-x) = -f(x)$;
10. periodická na D , existuje-li takové číslo $T > 0$, že:
 - a) $\forall x \in D \Rightarrow x+T \in D, x-T \in D$,
 - b) $f(x+T) = f(x), \forall x \in D$;
 nejmenší číslo T s těmito vlastnostmi se nazývá základní perioda;
11. omezená v D , existuje-li číslo $K > 0$ takové, že $|f(x)| \leq K, \forall x \in D$ (shora omezená, zdola omezená);
12. prostá (injektivní) v D , když $\forall x_1, x_2 \in D, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Věta 4.1. Je-li funkce $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ostře monotónní v D , potom je prostá.

Důkaz. Z předpokladu $x_1 < x_2$ plyne buď $f(x_1) < f(x_2)$ nebo $f(x_1) > f(x_2)$. V obou případech je $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Poznámka. Obrácené tvrzení k větě 4.1 neplatí: prostá funkce nemusí být na D ostře monotónní:



Definice 4.4 (úloha: rovnice o jedné neznámé). Je dána funkce $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ a číslo $y_0 \in \mathbb{R}$. Úloha najít $x_0 \in D$ takové, že $f(x_0) = y_0$, se nazývá rovnici o jedné neznámé a zapisujeme

$$f(x) = y_0.$$

Číslu x_0 říkáme řešení nebo také kořen rovnice.

Poznámka. Je-li f elementární funkce nebo je určena elementárními funkcemi, dělíme rovnice na:

lineární, kvadratické, kubické, ... (tzv. algebraické) a
exponenciální, logaritmické, goniometrické, ... (tzv. transcendentní)
Např. $e^x + x^2 + 1 = \operatorname{tg} x$ je transcendentní rovnice,
 $x^3 + x - 1 = 0$ je algebraická rovnice.

Věta 4.2 (řešitelnost rovnic). Mějme rovnici $f(x) = y_0$ ve smyslu definice 4.4 a nechť $H(f)$ označuje obor hodnot funkce $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

- (1) Když $y_0 \in H(f)$, potom rovnice $f(x) = y_0$ má aspoň jedno řešení (kořen).
- (2) Když f je ostře monotónní v D , potom rovnice $f(x) = y_0$, $y_0 \in \mathbb{R}$ má nejvýše jedno řešení (kořen).
- (3) Když f je ostře monotónní v D a $y_0 \in H(f)$, potom rovnice $f(x) = y_0$ má právě jedno řešení (kořen).

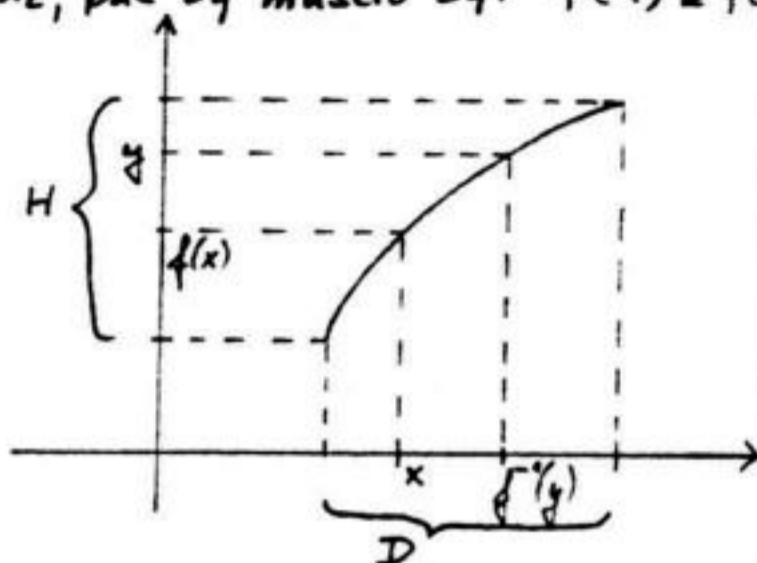
Důkaz. Tvzení (1) je zřejmé. Tvzení (2), (3): Nechť existují dvě řešení x_1, x_2 a $x_1 \neq x_2$. Potom $f(x_1) = y_0$, $f(x_2) = y_0$. Pak ovšem $f(x_1) = f(x_2)$, což odporuje předpokladu ostré monotónie.

Definice 4.5 (inverzní funkce). Mějme prostou funkci $f: D \xrightarrow{\text{na}} H$. Funkce φ definovaná na H , která každému $y \in H$ přiřazuje to jediné $x \in D$, které je řešením rovnice $f(x) = y$, se nazývá inverzní funkcí k funkci f a značí se $f^{-1}: H \rightarrow D$. Píšeme také: $y = f(x), x \in D \Leftrightarrow x = f^{-1}(y), y \in H$.

Věta 4.3 (existence inverzní funkce). Je-li funkce $f: D \xrightarrow{\text{na}} H$ ostře monotónní, potom na H existuje inverzní funkce f^{-1} , která je také ostře monotónní.

Důkaz. Podle věty 4.2 (3) pro každé $y \in H$ existuje právě jedno řešení rovnice $f(x) = y$, tj. existuje funkce $f^{-1}: y \rightarrow x$. Když pro $x_1 < x_2$ je $f(x_1) < f(x_2)$, potom pro $y_1 < y_2$ existuje $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$ a je $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$. Kdyby bylo $x_1 \geq x_2$, pak by muselo být $f(x_1) \geq f(x_2)$ a to je spor.

Příklad.



Definice 4.6 (superpozice funkcí). Mějme dvě funkce:

$$f: D \rightarrow H, \\ g: \mathcal{H} \rightarrow M, \quad H \subset \mathcal{H},$$

kde D, H, \mathcal{H}, M jsou podmnožiny \mathbb{R} .

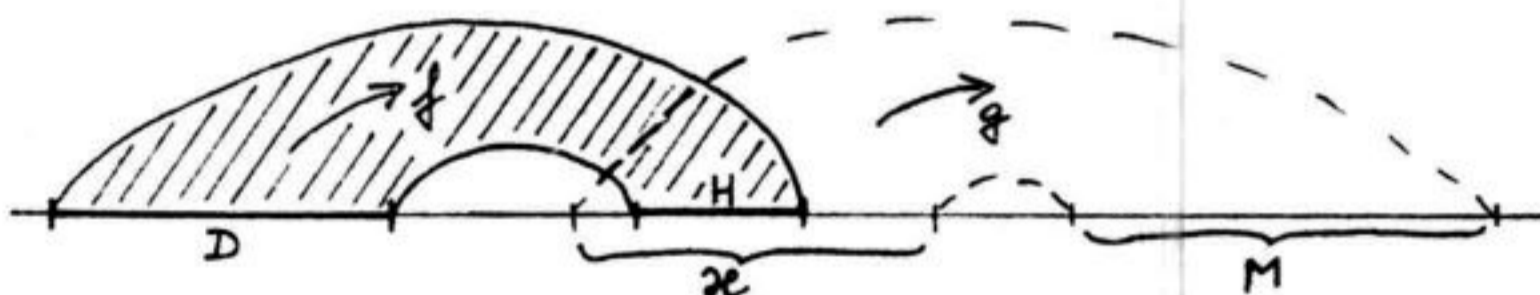
Funkce h definovaná v D (s oborem hodnot v M) předpisem

$$h(x) = g(f(x))$$

se nazývá superpozice funkcí g a f a značí se $h = g \circ f$.

Užívá se také termín složená funkce.

$$\left. \begin{array}{l} \text{mnemotechnická pomůcka: } y = f(x); x \in D, y \in H \\ z = g(y); y \in \mathcal{H}, z \in M \end{array} \right\} z = g(f(x)).$$



Za argument funkce g bereme pouze ta $y \in H$, které jsou obrazy (funkční hodnoty) čísel $x \in D$ zobrazených funkcí f .

Příklad.

$$z = \sin \sqrt{x+1} : z = \sin y, \quad \mathcal{H} = (-\infty, +\infty); \quad M = \langle -1, 1 \rangle; \\ y = \sqrt{x+1}; \quad D = \langle -1, +\infty \rangle; \quad H = \langle 0, +\infty \rangle.$$

Poznámka. Operace superpozice není obecně komutativní:

$$g \circ f \neq f \circ g .$$

$$z = \sin \sqrt{x} , \quad \left| \quad y = \sqrt{\sin x} , \right.$$

$$g(f(x)), \quad \left| \quad f(g(x)) . \right.$$

Poznámka. Analogicky zavádíme i vícenásobně superponované funkce:

$$z = \sin \sqrt{x+1} : \quad z = \sin y ,$$

$$y = \sqrt{v} ,$$

$$v = x+1 .$$

Důsledek definice 4.6. Jsou-li f a f^{-1} navzájem inverzní funkce, tj. $y = f(x)$, $x \in D$, $y \in H$ a

$$x = f^{-1}(y), y \in H, x \in D ,$$

potom $y = f(f^{-1}(y))$ } $f \circ f^{-1}$ je identická funkce na H ,
 $x = f^{-1}(f(x))$ } (identické zobrazení)

$f^{-1} \circ f$ je identická funkce na D ;

tj. $f \circ f^{-1} : H \rightarrow H$; $f^{-1} \circ f : D \rightarrow D$.

Na cvičení věnovat pozornost této problematice:

1. definiční obory funkcí;
2. oblasti monotónie , sudost, lichost, periodičnost, omezenost;
3. inverzní funkce, kompozice funkcí.

Příklad.

Definujme na \mathbb{R} funkci F předpisem: "Pro x ve tvaru nekonečného desetinného rozvoje $F(x)$ bude označovat počet výskytů číslice 5 na prvních deseti místech tohoto rozvoje za desetinnou čárkou".

Např.: $F(0) = 0$; $F(1) = 0$; $F(\pi) = 2$, neboť $\pi = 3,1415926536$;
 $F(\frac{1}{8}) = 1$, neboť $\frac{1}{8} = 0,1250000000$.

Funkce F je periodická s periodou 1: $F(x+1) = F(x)$
sudá, neboť: $F(-x) = F(x)$
omezená: $0 \leq F(x) \leq 10$

Na cvičení dokázat:

1. Sudá funkce nemůže být ostře monotónní.
2. Sudá monotónní funkce je konstantní.
3. Funkce současně sudá a lichá je nulová.
4. Periodická funkce nemůže být ostře monotónní.
5. Periodická monotónní funkce je konstantní.

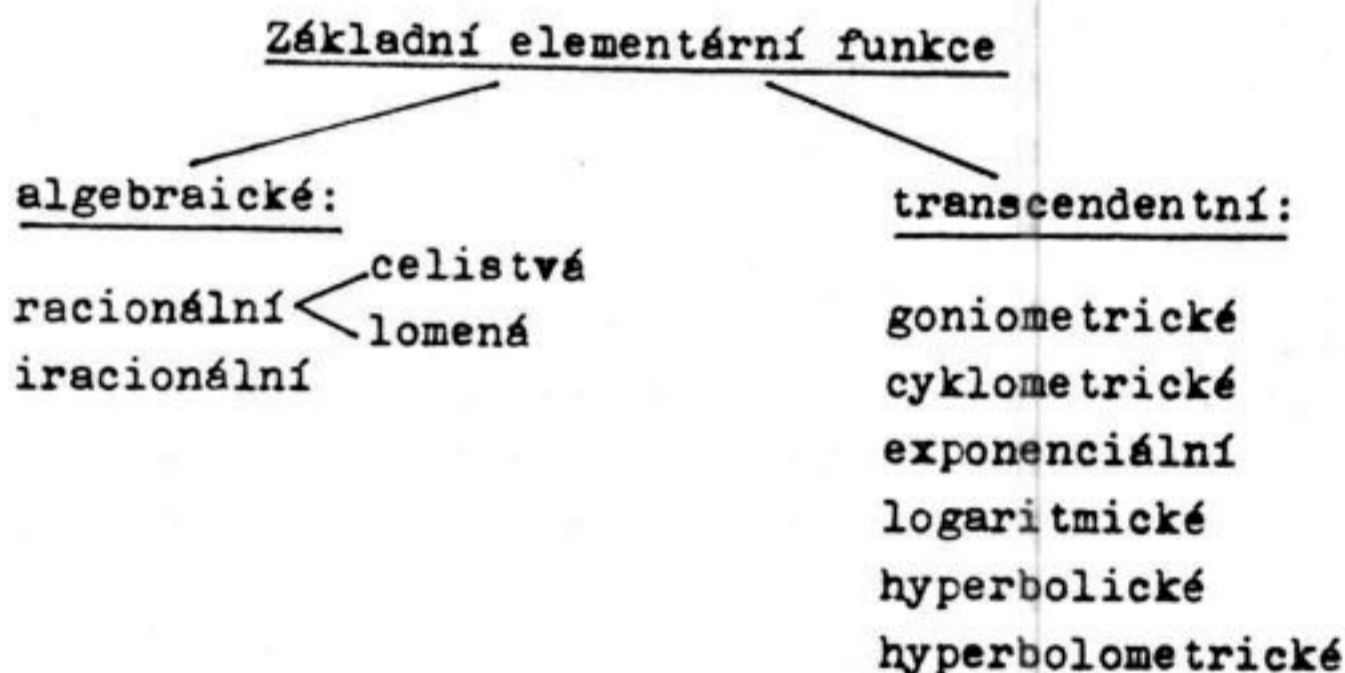
Definice 4.7 (algebraické operace s funkcemi). Necht funkce f a g mají týž definiční obor D . Potom definujeme:

1. Součet: $f + g: x \in D \mapsto y = f(x) + g(x)$,
2. Rozdíl: $f - g: x \in D \mapsto y = f(x) - g(x)$,
3. Součin: $f \cdot g: x \in D \mapsto y = f(x)g(x)$,
4. Podíl: $\frac{f}{g}: x \in D \mapsto y = \frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0$,
5. Násobek číslem: $\alpha f: x \mapsto y = \alpha \cdot f(x)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Příklad (prověřit!).

1. Součin liché a sudé funkce je lichá funkce.
2. Součin dvou lichých funkcí je sudá funkce.
3. Součet a součin T -periodických funkcí je T -periodická funkce ($y = \frac{1}{2}g x \sin x$ je 2π -periodická funkce).

4.2. Některé elementární funkce.



4.3. Limita funkce.

Mějme funkci f definovanou v $D(f) \subset \mathbb{R}$ a necht x_0 je hromadný bod definičního oboru (tj. může být $x_0 \notin D(f)$, ale v každém jeho okolí leží nekonečně mnoho bodů $D(f)$).

Definice 4.8 (Heine). a) Když existuje $b \in \mathbb{R}$ takové, že pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset D(f)$, $x_n \neq x_0$, konvergující k číslu x_0 , posloupnost $\{f(x_n)\}$ konverguje ($n \rightarrow +\infty$) k číslu b , říkáme, že funkce f má v bodě x_0 limitu b a píšeme

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b.$$

b) Když pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset D(f)$, $x_n \neq x_0$, konvergující k číslu x_0 , posloupnost $\{f(x_n)\}$ diverguje k $+\infty$ (resp. $-\infty$), píšeme

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty, \quad \text{resp.} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty.$$

c) Když existuje $b \in \mathbb{R}$ takové, že pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset D(f)$, divergující k $+\infty$ (resp. $-\infty$), posloupnost $\{f(x_n)\}$ konverguje k číslu b , říkáme, že funkce f má v $+\infty$ (resp. $-\infty$) limitu b , a píšeme

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b, \quad \text{resp.} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b.$$

d) Když pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset D(f)$, divergující k $+\infty$ (resp. k $-\infty$), posloupnost $\{f(x_n)\}$ diverguje k $+\infty$, píšeme

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \text{resp.} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

Analogicky definujeme: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$,
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Příklad.

Stanovme $\lim_{x \rightarrow 2} x^2$. Nechť $\{x_n\}$ je libovolná posloupnost bodů $x_n \in D(f)$ taková, že $x_n \rightarrow 2$, $x_n \neq 2$. Potom $f(x_n) = x_n^2$. Podle věty 2.6 (algebra limit) je $x_n^2 \rightarrow 2^2$, tj. $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$.

Příklad.

Stanovit $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2-1}{x-1}$, $x \neq 1$. Nechť $\{x_n\}$ je libovolná posloupnost bodů $x_n \in D(f)$ taková, že $x_n \rightarrow 0$, $x_n \neq 0$. Potom

$$f(x_n) = \frac{2x_n^2 - 1}{x_n - 1} . \text{ Opět podle věty 4.6 je } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x_n^2 - 1}{x_n - 1} = 1 , \text{ tj.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - 1}{x - 1} = 1 .$$

Příklad.

Stanovit: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x}$.

Pro libovolnou posloupnost $\{x_n\}$: $x_n \rightarrow 0$, $x_n > 0$ je $\frac{1}{x_n} \rightarrow +\infty$,
 Pro libovolnou posloupnost $\{x_n\}$: $x_n \rightarrow 0$, $x_n < 0$ je $\frac{1}{x_n} \rightarrow -\infty$,

$\Rightarrow \frac{1}{x_n}$ diverguje:

říkáme, že funkce $\frac{1}{x}$ "nemá v bodě 0 limitu".

Pro libovolnou posloupnost $\{x_n\}$: $x_n \rightarrow +\infty$ je $\frac{1}{x_n} \rightarrow 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$,

Pro libovolnou posloupnost $\{x_n\}$: $x_n \rightarrow -\infty$ je $\frac{1}{x_n} \rightarrow 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Příklad.

Mějme $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, $x \neq 0$. Stanovte $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$. Zvolme

$x_n = \frac{1}{n\pi}$. Pak $f(x_n) = \sin n\pi = 0$, tj. $\lim f(x_n) = 0$.

Zvolme $y_n = \frac{2}{(4n+1)\pi}$. Pak $f(y_n) = \sin(4n+1)\frac{\pi}{2} = 1$, tj.

$\lim f(y_n) = 1$. Tedy posloupnost $\{f(x_n)\}$ je divergentní;

říkáme, že funkce $f(x)$ nemá v bodě $x = 0$ limitu.

Definice 4.8'a) (Cauchy). Funkce f má v bodě x_0 limitu

$b \in \mathbb{R}$, když: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \forall x: 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$;

$\exists b \in \mathbb{R} \wedge \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$.

Příklad.

Dokažte podle Cauchyovy definice limity, že $\lim_{x \rightarrow 0} 2^x = 1$.

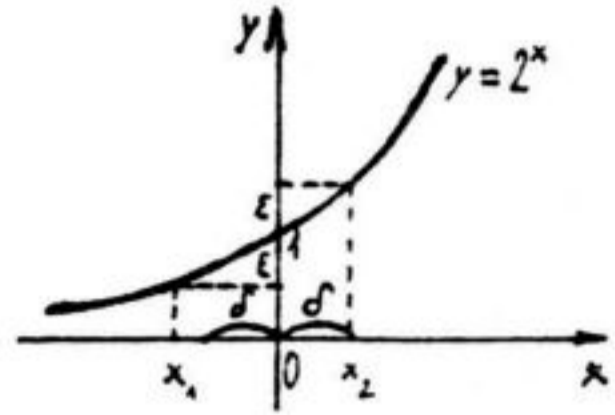
Uvažujme nerovnici $|2^x - 1| < \varepsilon$, tj. $1 - \varepsilon < 2^x < 1 + \varepsilon$,

tj. pro dostatečně malé $\varepsilon > 0$ je

$$\underbrace{\frac{\ln(1-\varepsilon)}{\ln 2}}_{x_1} < x < \underbrace{\frac{\ln(1+\varepsilon)}{\ln 2}}_{x_2} .$$

Označíme $\delta = \min\{|x_1|, |x_2|\}$... takové minimum jistě existuje pro každé (dostatečně malé) $\varepsilon > 0$. Když nyní $|x| < \delta$,

pak také $x_1 < x < x_2$, a tedy také $1 - \varepsilon < 2^x < 1 + \varepsilon$, neboli $|2^x - 1| < \varepsilon$.



Poznámky:

1. Lze dokázat, že funkce f má vlastnost D 4.8 a), právě když má vlastnost D 4.8'a), tj. Heineova a Cauchyova definice limity jsou ekvivalentní.
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ nezávisí na volbě posloupnosti $\{x_n\}$ a nezávisí na tom, zda x_0 patří či nepatří do definičního oboru funkce f .
3. Topologická definice limity (ekvivalentní dvěma předchozím)
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b \iff \forall U_\varepsilon(b) \exists P_\delta(x_0): x \in P_\delta(x_0) \cap D(f) \implies f(x) \in U_\varepsilon(b)$.
4. "limita" je vlastnost funkce f v okolí bodu x_0 - tzv. lokální vlastnost - charakterizuje chování funkce f v okolí bodu x_0 .

Věta 4.4. Existuje-li $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$ ($b \in \mathbb{R}$), potom je jediná.

Důkaz (sporem). Kdyby existovaly dvě limity $b_1 \neq b_2$, musela by existovat posloupnost $x_n \rightarrow x_0$, $x_n \neq x_0$ taková, že

$f(x_n) \rightarrow b_1$, $f(x_n) \rightarrow b_2$ - což není možné: konvergentní posloupnost $\{f(x_n)\}$ má právě jednu limitu.

Věta 4.5 (algebra limit). Nechť funkce f a g mají společný definiční obor D a nechť existují limity

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b \in \mathbb{R} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = c \in \mathbb{R} \quad .$$

Potom existují limity funkcí $f \pm g$, fg , $\frac{f}{g}$ ($g(x) \neq 0$, $x \in D$) a platí:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b \pm c$,
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b \cdot c$,
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{b}{c}$, $c \neq 0$.

Důkaz. Důsledek příslušné věty o posloupnostech.

Příklad.

Protože $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} x^n = (\lim_{x \rightarrow x_0} x)^n = x_0^n$.

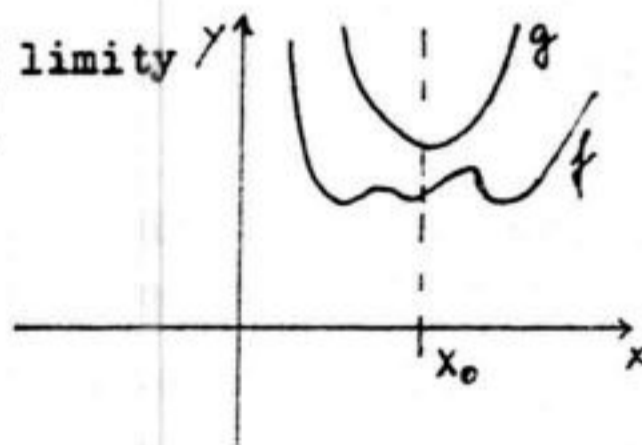
Příklad.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} \quad , \quad \text{pokud } Q(x_0) \neq 0 \quad .$$

Věta 4.6 (srovnávací). Nechť funkce f , g , h mají společný definiční obor D .

1. Když $f(x) \leq g(x)$, $x \in D$ a existují limity $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$, potom platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \quad .$$



2. Když $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, $x \in D$ a existují limity

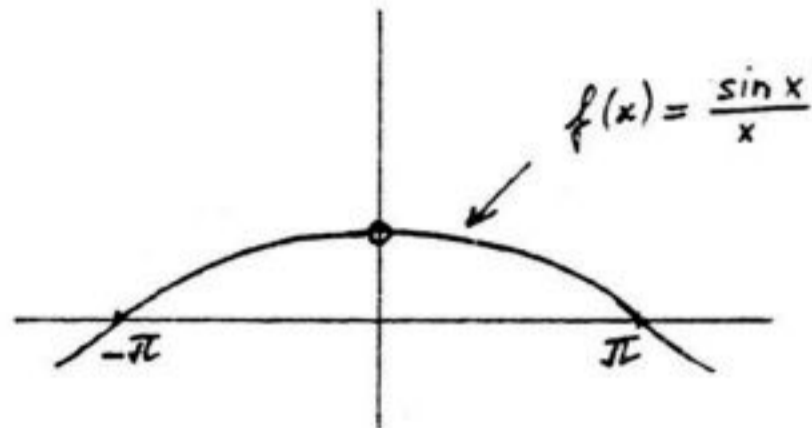
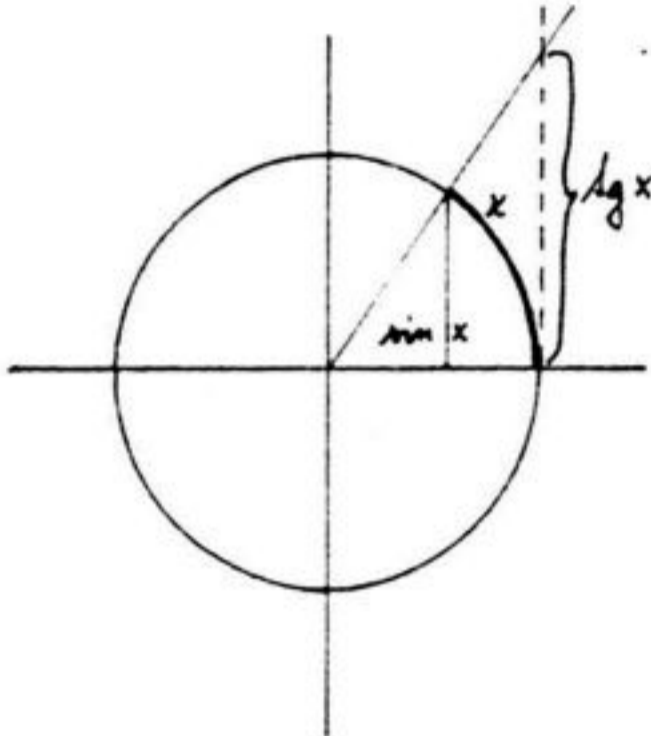
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ a jsou si rovny, potom existuje také

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) \quad \text{a platí} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \quad .$$

- Důkaz. 1. Důsledek příslušné věty o posloupnostech.
2. Důsledek věty o sevření (věta o 2 políčkách).

Příklad.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 .$$



Z obrázku:

$$0 < |\sin x| < |x| < \left| \frac{\sin x}{\cos x} \right|$$

$$\text{pro } |x| < \frac{\pi}{2} ,$$

$$0 < 1 < \left| \frac{x}{\sin x} \right| < \frac{1}{\cos x} ,$$

$$\text{resp. } 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

a užije se věta o sevření.

Příklad.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e .$$

Vybereme libovolnou posloupnost $x_n \rightarrow +\infty$ takovou, že $n < x_n < n+1$.

Potom
$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x_n} < \frac{1}{n} ,$$

$$1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{x_n} < 1 + \frac{1}{n} ,$$

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

a užije se věta o sevření.

Věta 4.7 (omezenost a limita). Když existuje $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, potom existuje prstencové okolí $F_\delta(x_0)$, v němž je funkce f omezená.

Důkaz. Důsledkem tvrzení, že konvergentní posloupnost je omezená.

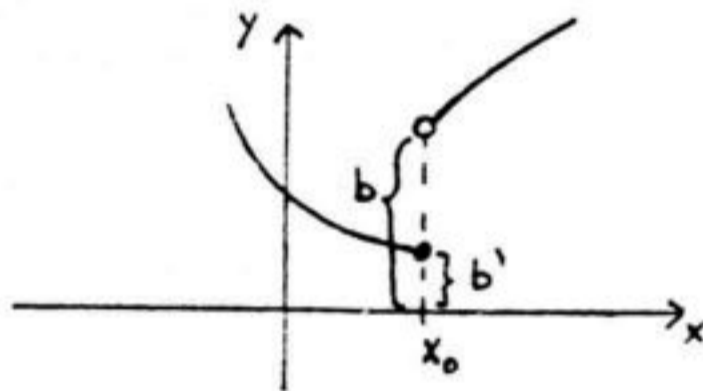
Definice 4.9 (jednostranné limity). Číslo b se nazývá pravostrannou limitou funkce f v bodě x_0 , když pro každou posloupnost $\{x_n\}$, $x_n > x_0$, $x_n \rightarrow x_0$ je $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = b$; píšeme

$$b = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0 + 0) \quad .$$

Číslo b' se nazývá levostrannou limitou funkce f v bodě x_0 , když pro každou posloupnost $\{x_n\}$, $x_n < x_0$, $x_n \rightarrow x_0$ je $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b'$; píšeme

$$b' = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0 - 0) \quad .$$

Poznámka. Lze (provedte!) vyslovit ekvivalentní Cauchyovu resp. topologickou definici jednostranné limity



a lze formulovat "jednostranné" verze předchozích vět.

Věta 4.8 (kritérium existence limity = nutná a postačující podmínka pro existenci limity). Funkce f definovaná v okolí hromadného bodu x_0 má v tomto bodě limitu právě tehdy, když existují obě jednostranné limity a tyto limity jsou si rovny, tj. když platí

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \quad .$$

Důkaz. 1. Když $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$, potom pro každou posloupnost

$\{x_n\}$, $x_n \rightarrow x_0$ je $f(x_n) \rightarrow b$ nezávisle na tom, zda $x_n > x_0$ nebo $x_n < x_0$.

2. Existují $f(x_0 + 0)$ a $f(x_0 - 0)$ a platí $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = b$.
Nechť $\{x_n\} \subset D(f)$, $x_n \neq x_0$, $x_n \rightarrow x_0$. Potom buď $x_n < x_0$ pro skoro všechna n , nebo $x_n > x_0$ pro skoro všechna n , nebo

$\{x_n\} = \{y_n\} \cup \{z_n\}$, $y_n < x_0$ a $z_n > x_0$. V prvních dvou případech $f(x_n) \rightarrow f(x_0-0)$, resp. $f(x_n) \rightarrow f(x_0+0)$, tj. $f(x_n) \rightarrow b$.
 Ve třetím případě $f(y_n) \rightarrow f(x_0-0)$, $f(z_n) \rightarrow f(x_0+0)$, tj. $f(x_n) \rightarrow b$. Podle Heineovy definice limity tedy $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$.

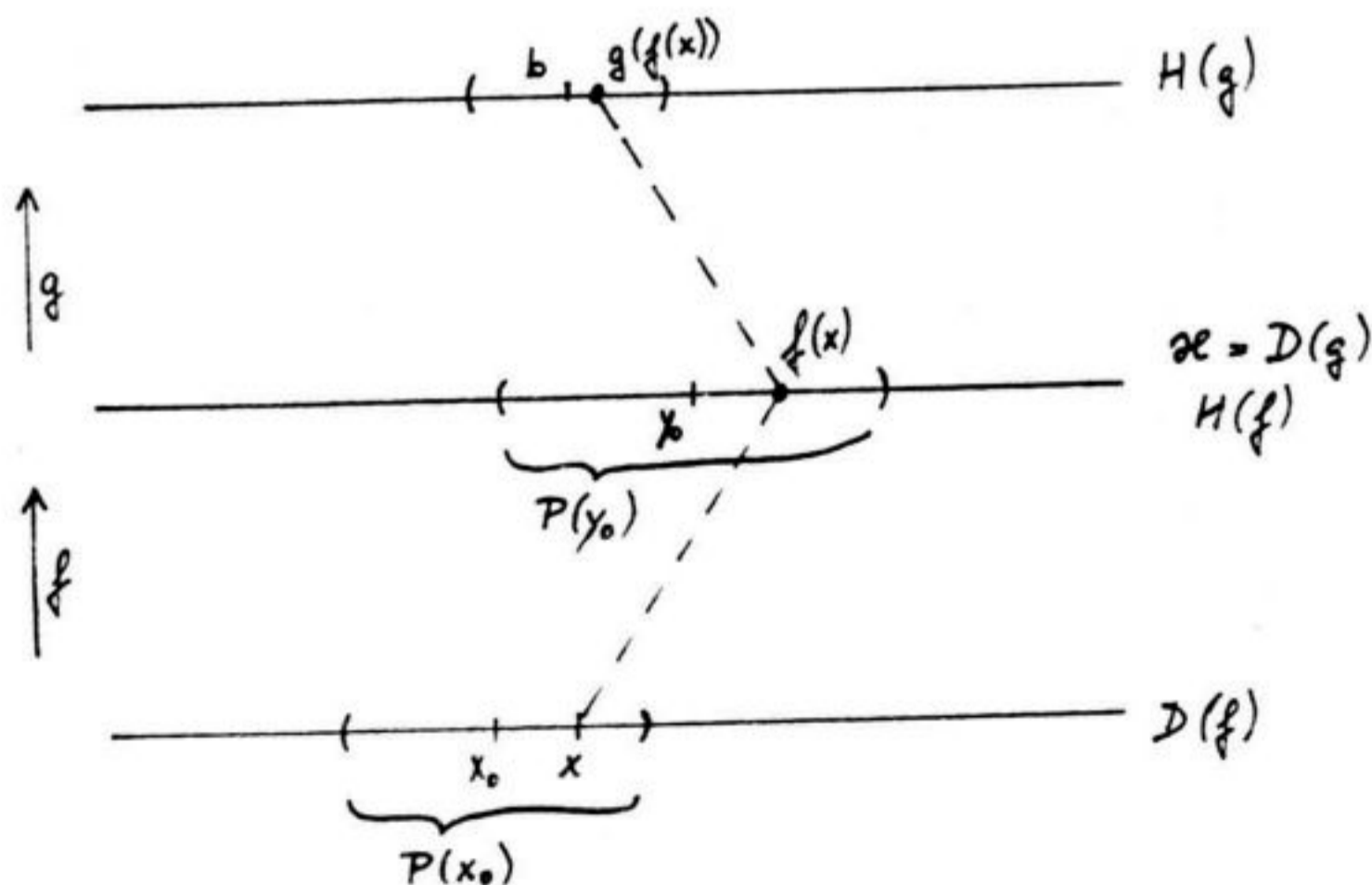
Věta 4.9 (limita složené funkce). Mějme funkci $h(x) = g(f(x))$, $x \in D$, kde $f: D \rightarrow \mathbb{R}$; $g: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$, $H(f) \subset \mathcal{H}$ a nechť existují $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$, $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = b$.

Je-li splněna alespoň jedna z podmínek:

- (1) existuje prstencové okolí $P(x_0)$ bodu x_0 tak, že $f(x) \neq y_0$ pro všechna $x \in P(x_0) \cap D(f)$;
- (2) $b = g(y_0)$,

potom existuje $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x))$ a platí $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = b$.

Poznámka. Analogickou větu lze dokázat i pro jednostranné limity a pro limity "nevlastní a v nevlastních bodech".



Příklad.

Určíme $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x^2+1}$:

$$\left. \begin{array}{l} y = f(x) = x^2+1, x_0 = 2: \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5 = y_0, \\ g(y) = \sqrt{y}, y_0 = 5: \lim_{y \rightarrow 5} g(y) = \sqrt{5} = b, \end{array} \right\} \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2} g(f(x)) = \\ = \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x^2+1} = \sqrt{5}. \end{array}$$

Příklad.

Určíme $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}}$:

$$\left. \begin{array}{l} y = f(x) = \frac{1}{x}, x_0 = 0^+, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty, \\ g(y) = (1 + \frac{1}{y})^y, y_0 = +\infty, \lim_{y \rightarrow +\infty} g(y) = e, \end{array} \right\} \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} g(f(x)) = \\ = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \end{array}$$

$f(x) \neq y_0$ pro $x \neq x_0$, tj. $\frac{1}{x} \neq +\infty$ pro $x \neq 0 \Rightarrow$ podmínka je splněna.

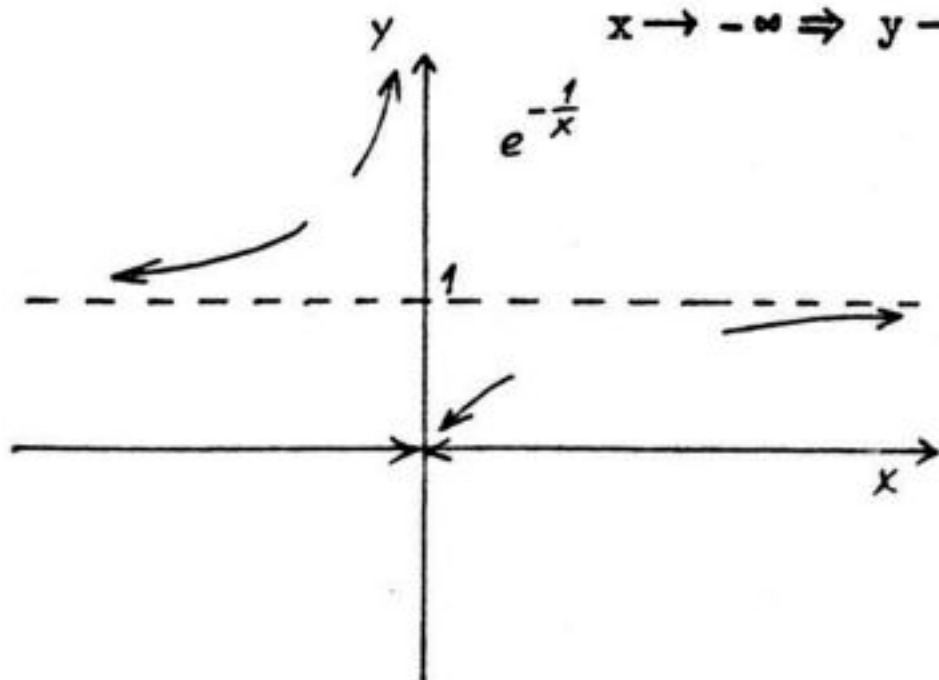
Dále platí: $\lim_{y \rightarrow -\infty} (1 + \frac{1}{y})^y = \lim_{t \rightarrow +\infty} (1 - \frac{1}{t})^{-t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{(1 - \frac{1}{t})^t} = \frac{1}{e^{-1}} = e$,

$t = -y$; tj. $\lim_{x \rightarrow 0^-} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Příklad.

Určíme $\lim e^{-\frac{1}{x}}$, když $x \rightarrow 0^+$, $x \rightarrow 0^-$, $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = y = -\frac{1}{x}, \\ g(y) = z = e^y, \end{array} \right\} \text{ když } \begin{array}{l} x \rightarrow 0^+ \Rightarrow y \rightarrow -\infty \Rightarrow z \rightarrow 0^+; \\ x \rightarrow 0^- \Rightarrow y \rightarrow +\infty \Rightarrow z \rightarrow +\infty; \\ x \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow 0^- \Rightarrow z \rightarrow 1^-; \\ x \rightarrow -\infty \Rightarrow y \rightarrow 0^+ \Rightarrow z \rightarrow 1^+. \end{array}$$



Poznámka. Předpoklady (1) resp. (2) věty 4.9 jsou nutné. Jejich nesplněním věta ztrácí platnost.

Mějme složenou funkci $g(f(x))$, kde

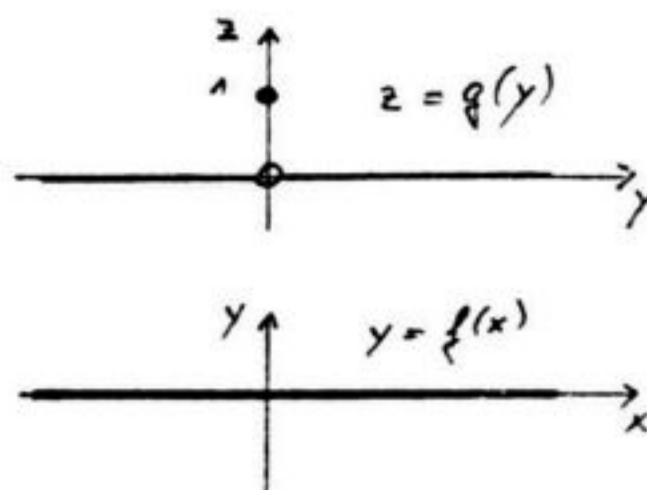
$$y = f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R},$$

$$z = g(y) = \begin{cases} 0, & \text{pro } y \neq 0, \\ 1, & \text{pro } y = 0. \end{cases}$$

Zde existují limity:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = y_0; \quad \lim_{y \rightarrow 0} g(y) = 0 = b,$$

avšak: $g(0) = 1$; je tedy $g(y_0) \neq b$ (není splněna podmínka (2)) a také $f(x) = y_0$ v okolí $x_0 = 0$ (není splněna podmínka (1)). Na druhé straně $g(f(x)) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$, neboť $f(x) = 0$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$, a tedy $\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) = 1$, tj. limita složené funkce není rovna limitě vnější funkce.



Důsledky věty 4.9.

- (1) $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -x_0^-} f(-x)$, existuje-li některá z těchto limit.
- (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right)$, existuje-li některá z těchto limit.
- (3) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h)$.

4.4. Některá další fakta.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 : \frac{1}{x} \ln(1+x) = \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} \rightarrow \ln e = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 : e^x - 1 = z \Rightarrow x = \ln(1+z) \Rightarrow \frac{z}{\ln(1+z)} \rightarrow 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1, a > 0 : \text{z definice limity},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}, a > 0, a \neq 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, a > 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty ,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 .$$

Poznámka. Funkce f se nazývá omezená ve srovnání s funkcí g (g -omezená), pro $x \rightarrow x_0$, když existuje interval I obsahující x_0 a konstanta C taková, že platí

$$|f(x)| \leq C|g(x)| , \quad x \in I , \quad x \neq x_0 .$$

Stručně píšeme (a čteme) $f(x) = O(g(x))$, $x \rightarrow x_0$.

Je-li $g(x) = 1$, pak zápis $f(x) = O(1)$ znamená normální omezenost.

Existuje-li konečná limita $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, pak $f = O(g)$.

Je-li $f = O(g)$ a $g = O(f)$, $x \rightarrow x_0$, říkáme, že funkce f a g jsou stejného řádu pro $x \rightarrow x_0$.

Je-li $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, říkáme, že funkce f a g jsou si

asymptoticky rovny (v okolí x_0) a píšeme $f \sim g$.

Příklad.

Protože $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{100+x}{e^x} = 100 \Rightarrow e^x$, $100+x$ jsou stejného řádu pro $x \rightarrow 0$.

Příklad.

Platí: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$,

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, tj.

$x \sim \sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \arcsin x \sim \operatorname{arctg} x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1$.

Příklad (metoda asymptotických rozvojų).

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + 2 \operatorname{arctg} 3x + 3x^2}{\ln(1+3x + \sin^2 x) + xe^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + 6x + 3x^2}{3x + x^2 + x} = \frac{8}{4} .$$

Užili jsme vztahy $\ln(1+z) \sim z$, $xe^x \sim x$ pro $z \rightarrow 0$, $x \rightarrow 0$.

Definice 4.10. Číslo c se nazývá částečnou limitou funkce f pro $x \rightarrow x_0$, jestliže existuje posloupnost $\{x_n\}$, $x_n \neq x_0$ taková, že pro $x_n \rightarrow x_0$ je $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = c$.

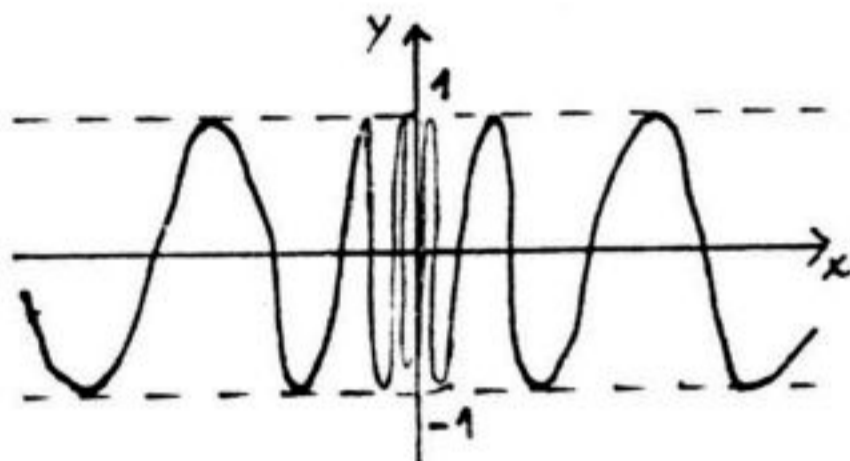
Jednostranné limity jsou příkladem částečných limit.

Příklad.

$$f(x) = \sin \frac{1}{x} \text{ pro } x \rightarrow 0:$$

částečné limity jsou např.

1, -1, 0, ... atd.

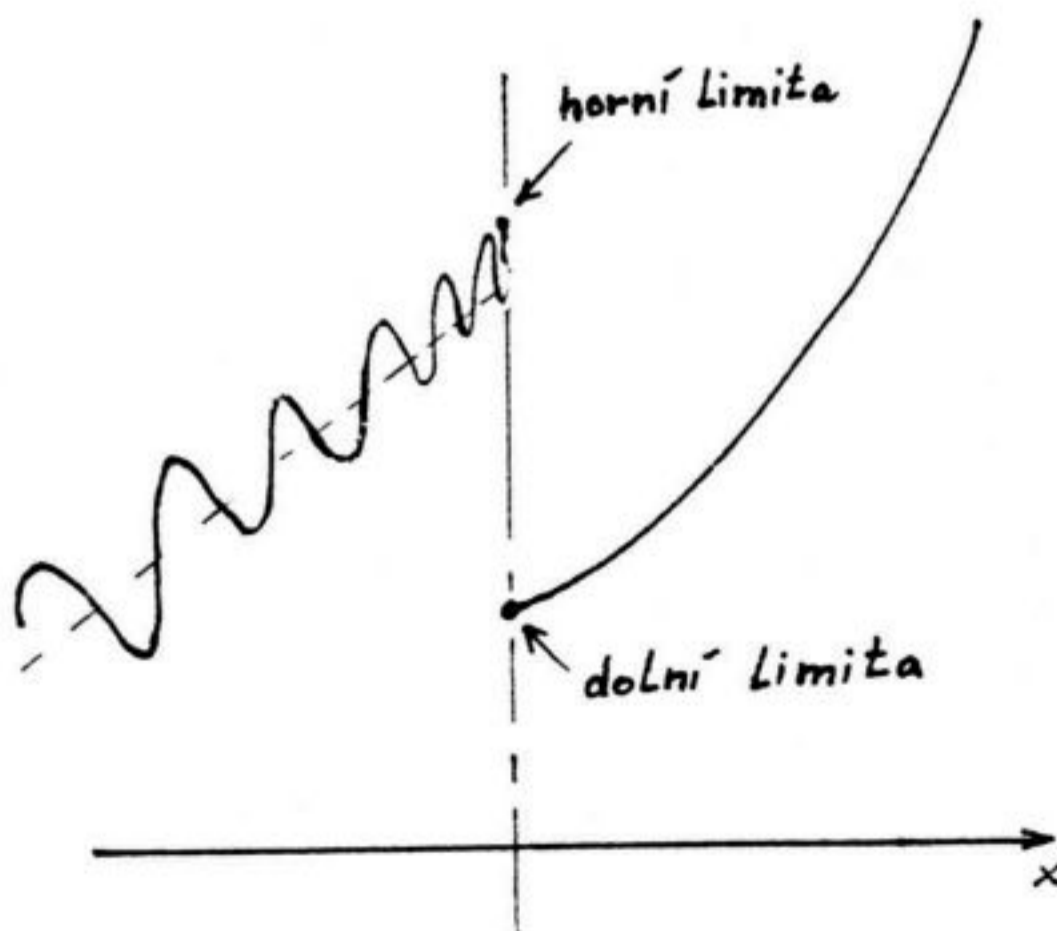


Definice 4.11. Největší a nejmenší částečná limita funkce f v bodě x_0 se nazývají horní a dolní limita funkce f a značí se

$$\underline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \inf (x) \quad ,$$

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \sup f(x) \quad .$$

Příklad.



limita zleva neexistuje

5. Spojitost funkcí.

5.1. Spojitost v bodě. Body nespojitosti.

Definice 5.1. Funkce $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá v hromadném bodě $x_0 \in D$ (spojitost definujeme v bodě definičního oboru), když

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) ;$$

je-li x_0 izolovaný bod definičního oboru funkce f , považujeme funkci f v tomto bodě za spojitou.

Podmínku spojitosti píšeme také takto: $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$,

nebo $\lim_{h \rightarrow 0} [f(x_0 + h) - f(x_0)] = 0$, kde $h = x - x_0$.

Jednostranná spojitost:

Je-li $f(x_0^-) = f(x_0)$, říkáme, že f je spojitá zleva v bodě x_0 ,
je-li $f(x_0^+) = f(x_0)$, říkáme, že f je spojitá zprava v bodě x_0 .

Věta 5.1 (ekvivalentní vyjádření spojitosti \equiv nutné a postačující podmínky spojitosti \equiv kritéria spojitosti).

a) Cauchy: Funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in D(f)$, právě když:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in D(f): |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon ;$$

stručně: $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \Rightarrow f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$.

b) Heine: Funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in D(f)$, právě když:

pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset D(f)$, $x_n \rightarrow x_0$, $x_n \neq x_0$,
posloupnost $\{f(x_n)\}$ konverguje k $f(x_0)$;

stručně: $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n)$.

c) topologické: Funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in D(f)$, právě když:

$$\forall U_\varepsilon(f(x_0)) \exists U_\delta(x_0) (\forall x \in U_\delta(x_0) \cap D(f)) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0)).$$

d) Funkce je spojitá v bodě $x_0 \in D(f)$, právě když existují konečné limity $f(x_0^-)$, $f(x_0^+)$ a platí $f(x_0^-) = f(x_0) = f(x_0^+)$.

Definice 5.2 (body nespojitosti). Nechť f je definována v okolí $P(x_0)$ hromadného bodu x_0 definičního oboru (připouštíme $x_0 \notin D(f)$, avšak $F(x_0) \subset D(f)$). Bod x_0 se nazývá bodem nespojitosti funkce f , jestliže buď není v x_0 definována, nebo

je v něm definována, ale není v něm spojitá.

Když:

- (1) $f(x_0^+) = f(x_0^-) \neq f(x_0)$: x_0 je bod odstranitelné nespojitosti;
- (2) $f(x_0^+) \neq f(x_0^-)$: x_0 je bod nespojitosti 1. druhu;
číslo $f(x_0^+) - f(x_0^-)$ se nazývá skok funkce f ;
- (3) neexistuje aspoň jedna z limit $f(x_0^-)$, $f(x_0^+)$: (včetně případu $f(x_0^\pm) = \pm\infty$): x_0 je bod nespojitosti 2. druhu.

Poznámka. Je-li x_0 bod odstranitelné nespojitosti funkce f , potom funkce

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in D, x \neq x_0, \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), & \text{pro } x = x_0 \end{cases}$$

je spojitá (v bodě x_0).

Příklad.

Ukážeme, že funkce $f(x) = x^2$ je spojitá v libovolném bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, $f(x_0) = x_0^2$.

Podle Heineho: Pro $x_n \rightarrow x_0$, $x_n \neq x_0 \Rightarrow \underbrace{x_n \cdot x_n}_{f(x_n)} \rightarrow x_0^2$.

Příklad.

Ukážeme, že funkce $f(x) = \sqrt{x}$ je v bodě $x_0 \geq 0$ spojitá. Podle Caychyho: pro $x_0 > 0$ dostáváme

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \leq \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}}, \text{ neboť } \sqrt{x} + \sqrt{x_0} \geq \sqrt{x_0}. \text{ Tedy}$$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ takové, že když $|x - x_0| < \delta$, potom $|x - x_0| < \sqrt{x_0} \varepsilon$,

a tedy $\frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}} < \varepsilon$. Potom $|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \varepsilon$; zvolíme tedy $\delta = \sqrt{x_0} \varepsilon$.

V bodě $x_0 = 0$: $\sqrt{x} < \varepsilon$ pro $|x| < \delta$, tj. volíme $\delta = \varepsilon^2$.

Příklad.

Dokažte spojitost funkce $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, pro každé $x_0 \in \mathbb{R}$.

Potřebujeme dokázat, že $\lim_{x \rightarrow x_0} |\sin x - \sin x_0| = 0$.

Využijeme vzorce: $\sin x - \sin x_0 = 2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cos \frac{x + x_0}{2}$.

Využijeme také toho, že pro malá $|z|$ platí $|\sin z| \leq |z|$.

Takže

$$|\sin x - \sin x_0| \leq 2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \underbrace{\left| \cos \frac{x + x_0}{2} \right|}_{\leq 1} \leq 2 \sin \left| \frac{x - x_0}{2} \right| \leq |x - x_0|.$$

Poznámka. Platí-li $|f(x)-f(x_0)| \leq L|x-x_0|$, $x \in \langle a, b \rangle$, pak je f spojitá v každém bodě $\langle a, b \rangle$. Splňuje-li funkce f tuto podmínku, říkáme, že je lipschitzovská s konstantou L .

Věta 5.2 (algebraické vlastnosti spojitých funkcí). Nechť funkce f, g mají stejný definiční obor a jsou spojitě v bodě $x_0 \in D$. Potom jsou v bodě x_0 spojitě i funkce:
 $f+g$, $f-g$, fg , cf , $|f|$, $\frac{f}{g}$, když $g(x) \neq 0$.

Důkaz plyne z příslušné věty o limitách (věta 4.5).

Věta 5.3 (spojitost složené funkce). Nechť f je spojitá v bodě x_0 a nechť g je spojitá v bodě $y_0 = f(x_0)$. Potom superpozice $g \circ f = g(f(x))$ je spojitá v bodě x_0 .

Důkaz je důsledek obdobné věty u limit (věta 4.9).

Věta 5.4 (lokální omezenost spojitě funkce). Je-li funkce f spojitá v bodě $x_0 \in D(f)$, potom existuje okolí $U(x_0)$ bodu x_0 , v němž je funkce f omezená.

Důkaz plyne z nerovnosti $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$ platné pro $x \in U_\delta(x_0)$.

Věta 5.5 (o zachování znaménka). Nechť funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in D(f)$ a je $f(x_0) \neq 0$. Potom existuje okolí bodu x_0 takové, že $\text{sgn } f(x) = \text{sgn } f(x_0)$ pro všechna x z tohoto okolí.

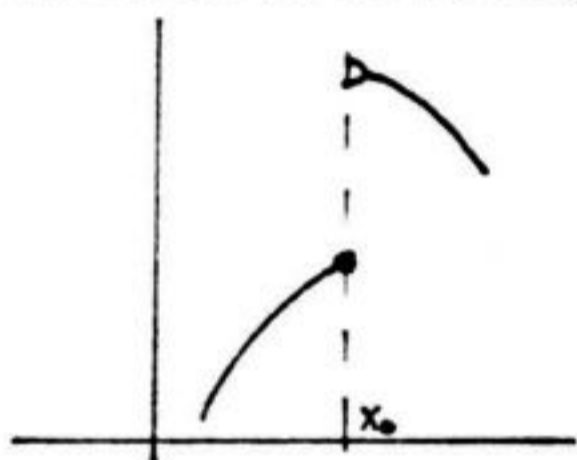
Důkaz. Nechť $f(x_0) > 0$. Protože $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ a $\forall x: |x-x_0| < \delta$ platí $- \varepsilon < f(x) - f(x_0) < \varepsilon$, tedy platí tato nerovnost i pro $\varepsilon = f(x_0)$, tj. $0 < f(x) < 2\varepsilon$ pro $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Nechť $f(x_0) < 0$. Stačí volit $\varepsilon = -f(x_0)$.

Poznámka. Funkce f se nazývá po částech spojitá na intervalu I , má-li v I konečný počet bodů nespojitosti vesměs 1. druhu.

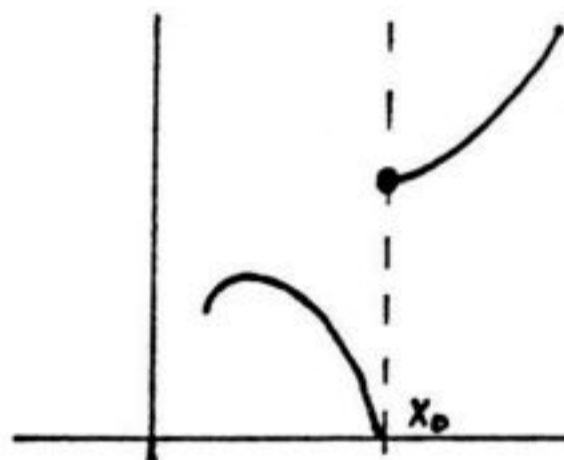
Poznámka.

1. $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \Rightarrow f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$, spojitost;
2. $x_0 - \delta < x \leq x_0 \Rightarrow f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$, spojitost zleva;
3. $x_0 \leq x < x_0 + \delta \Rightarrow f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$, spojitost zprava;
4. $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \Rightarrow f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$
 $\Leftrightarrow f(x_0) \leq \underline{\lim} f(x)$;
 polospojitost zdola ;
5. $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \Rightarrow f(x) < f(x_0) + \varepsilon$
 $\Leftrightarrow f(x_0) \geq \overline{\lim} f(x)$.
 polospojitost shora .

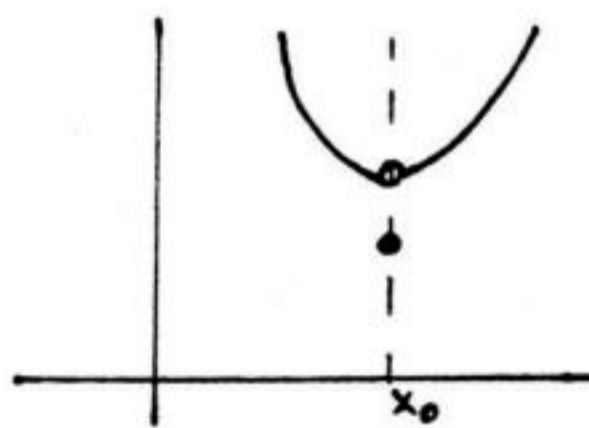
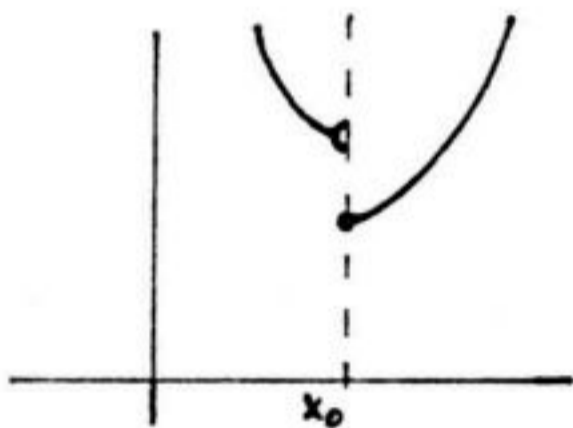
Ilustrativní příklady:



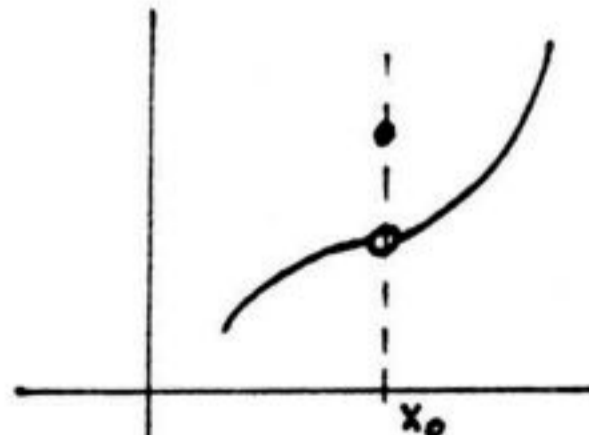
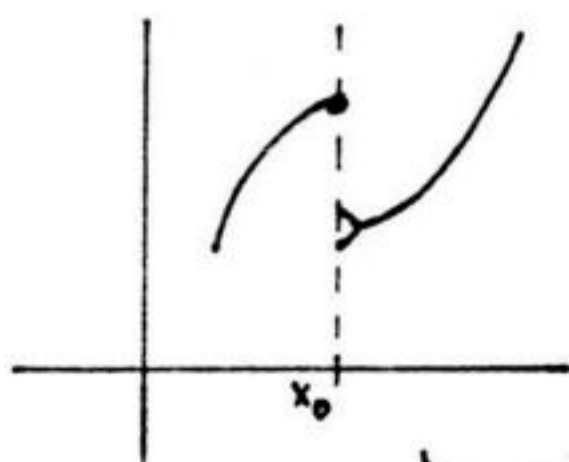
spojitost zleva



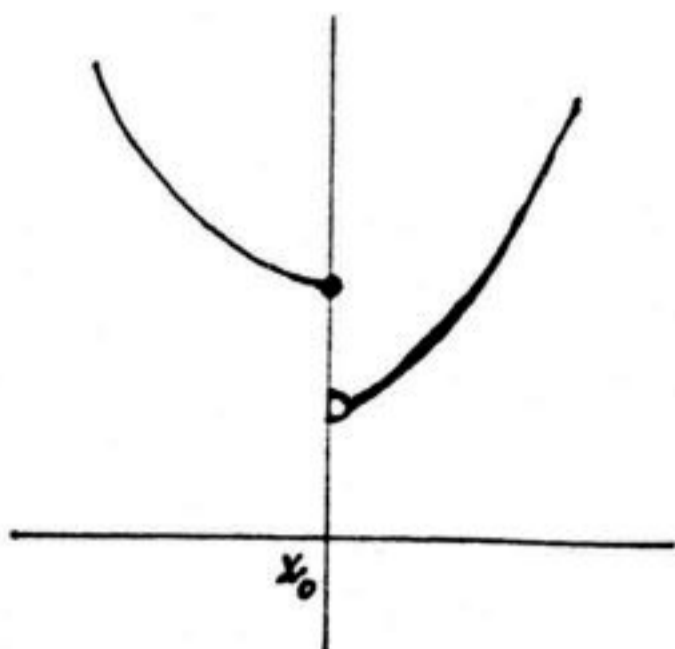
spojitost zprava



polospojitost zdola



polospojitost shora



není polospojité zdol. - neboť
dolní limita je menší než $f(x_0)$
(je polospojité shore)

5.2. Spojitost v uzavřeném intervalu.

Definice 5.3. Funkce f je spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$, je-li spojité v každém vnitřním bodě a v krajních bodech a, b je spojité zprava, zleva.

Věta 5.6 (o nulové hodnotě - Bolzano - Cauchy). Nechť funkce f je spojité v uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ a platí $f(a)f(b) < 0$ ($f(a), f(b)$ mají opačná znaménka). Potom existuje takové $\xi \in (a, b)$, že $f(\xi) = 0$.

Důkaz. Sestrojíme posloupnost do sebe vložených intervalů $\langle a_k, b_k \rangle$ postupným půlením, tj.

$$b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}, \quad b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2}, \quad \dots, \quad b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}$$

takových, že $f(a_k)f(b_k) < 0$. (Jestliže pro některé $\langle a_n, b_n \rangle$ nastane $f(a_n) = 0$, resp. $f(b_n) = 0$, bod ξ je tím nalezen).

Posloupnost délek: $\frac{b-a}{2^k} \rightarrow 0$.

Posloupnosti koncových bodů jsou monotónní a omezené, a tedy konvergentní. Jejich limita je číslo $\xi \in (a, b)$. Kdyby bylo $f(\xi) > 0$, pak by existovalo okolí bodu ξ , v němž $f(x) > 0$ (věta 5.5) a obě posloupnosti koncových bodů by měly kladné členy, což je spor. Podobně v případě $f(\xi) < 0$.

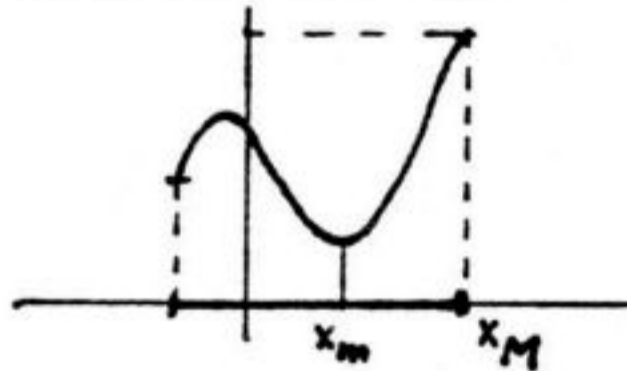
Důsledek věty 5.6 (existence kořene rovnice $f(x) = y_0$). Je-li f spojité v $\langle a, b \rangle$ a $f(a) \neq f(b)$, potom pro každé číslo y_0 mezi $f(a), f(b)$ existuje $x_0 \in (a, b)$ takové, že platí $f(x_0) = y_0$.

Jinak řečeno: Spojitá funkce nabývá všech hodnot mezi $f(a)$ a $f(b)$.

Věta 5.7 (Weierstrassova o nabývání maxima a minima). Nechť funkce f je spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$. Potom
(1) funkce f je v $\langle a, b \rangle$ omezená,
(2) existují takové body $x_m, x_M \in \langle a, b \rangle$, že

$$f(x_m) = \inf_{x \in \langle a, b \rangle} f(x) \quad ; \quad f(x_M) = \sup_{x \in \langle a, b \rangle} f(x) .$$

Stručně řečeno: Funkce f spojitá v $\langle a, b \rangle$ nabývá (na $\langle a, b \rangle$) své největší a nejmenší hodnoty.



Důkaz. (1) Sporem: Nechť pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje bod $x_n \in \langle a, b \rangle$, že $|f(x_n)| > n$ (tj. f není omezená). Posloupnost $\{x_n\}$ je omezená koncovými body a, b intervalu $\langle a, b \rangle$. Potom z ní lze vybrat konvergentní podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ (věta 2.3).

Její limita x_0 musí ležet v $\langle a, b \rangle$. Z předpokladu spojitosti pak plyne $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x_0)$, což je ve sporu s předpokladem $|f(x_n)| > n$.

(2) Označme $M = \sup_{x \in \langle a, b \rangle} f(x)$. Máme dokázat, že existuje

$x_M \in \langle a, b \rangle$ takové, že $f(x_M) = M$.

Sporem: Nechť pro žádné $x \in \langle a, b \rangle$ uvedená rovnost neplatí.

Potom také funkce $g(x) = \frac{1}{M-f(x)}$ je spojitá (a kladná) v $\langle a, b \rangle$, a tedy omezená, tj.

$$\exists M_1 > 0 : 0 < \frac{1}{M-f(x)} < M_1 ,$$

tedy:

$$\frac{1}{M_1} < M-f(x) \Rightarrow f(x) < M - \frac{1}{M_1} , \quad \forall x \in \langle a, b \rangle .$$

To je však spor, neboť M je podle předpokladu nejmenší horní hranice. (Našli jsme horní hranici, která je menší než nejmenší, a to je spor.)

Poznámka. Pro platnost věty je nezbytný předpoklad spojitosti na uzavřeném intervalu, případně (obecnější verze věty) spojitost na uzavřené omezené množině v \mathbb{R} . Funkce spojitá pouze "kompaktní"

na otevřeném intervalu (např. $\operatorname{tg} x$ v $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$) obecně nemusí nabývat maxima a minima v tomto intervalu.

Věta 5.8.

- (1) Je-li funkce f ostře monotónní v intervalu I a je-li $f(I)$ (obraz intervalu I) interval, potom f je spojitá. (Postačující podmínka spojitosti.)
- (2) Je-li f spojitá v intervalu I (nemusí být uzavřený), potom množina $f(I)$ je jednobodová nebo interval.
- (3) Je-li f spojitá a prostá v uzavřeném intervalu I , potom inverzní funkce f^{-1} je (také) spojitá v $f(I)$.
- (4) Monotónní funkce má v otevřeném intervalu I nejvýše spočetně mnoho bodů nespojitosti a jsou to body nespojitosti 1. druhu. (Monotónní funkce nemůže mít body nespojitosti 2. druhu.)

5.3. Stejněměrná spojitost.

Abychom pochopili pojem stejnoměrné spojitosti funkce f , je třeba si promyslet pojem "spojitost na množině".

Definice 5.4. Funkce $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá na množině $I \subset \mathbb{R}$, je-li spojitá v každém bodě $x \in I$ (v případných hraničních bodech jednostranně). Jinými "slovy":

$$\forall x \in I \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(x, \varepsilon) \quad (\forall x' \in I: |x' - x| < \delta(x, \varepsilon)) \Rightarrow \\ \Rightarrow |f(x') - f(x)| < \varepsilon .$$

Definice 5.5. Funkce $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ je stejněměrně spojitá na množině I , když

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) \quad (\forall x', x \in I: |x' - x| < \delta(\varepsilon)) \Rightarrow |f(x') - f(x)| < \varepsilon ,$$

resp.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) \quad (\forall x_n \in I \wedge \forall x'_n \in I: |x'_n - x_n| < \delta(\varepsilon)) \Rightarrow \\ \Rightarrow |f(x'_n) - f(x_n)| < \varepsilon .$$

Poznámka. Funkce f není na množině I stejnoměrně spojitá, když existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro všechna $\delta > 0$ existují posloupnosti $\{x_n\}, \{x'_n\}$ takové, že $|x'_n - x_n| < \delta$, pro které však $|f(x'_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon$.

Příklad.

Ukažme, že funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ je spojitá v každém bodě $x \in (0, +\infty)$, tj. na intervalu $(0, +\infty)$, ale není na tomto intervalu stejnoměrně spojitá:

První část tvrzení je zřejmá. Zvolíme posloupnosti $x_n = \frac{1}{n}$, $x'_n = \frac{1}{2n}$: je evidentně $|x'_n - x_n| = \left| \frac{1}{2n} - \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{2n} \rightarrow 0$, avšak $|f(x'_n) - f(x_n)| = |2n - n| = n \rightarrow +\infty$.

Příklad.

Ukažme, že funkce $f(x) = \ln x$ není na intervalu $(0, 1)$ stejnoměrně spojitá.

Volíme $x_n = e^{-n}$, $x'_n = e^{-2n}$. Pak sice $|x'_n - x_n| = |e^{-2n} - e^{-n}| = \frac{1 - \frac{1}{e^n}}{e^n} \rightarrow 0$, avšak $|f(x'_n) - f(x_n)| = |-2n + n| = n \rightarrow +\infty$.

Věta 5.9 (Cantorova). Je-li funkce f spojitá na uzavřeném intervalu I , potom je stejnoměrně spojitá na tomto intervalu.

6. Základní pojmy diferenciálního a integrálního počtu.

6.1. Diference, derivace, diferenciál.

Mějme funkci $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ a vnitřní bod $x_0 \in D$. Definujeme pro $x \in U(x_0)$: $x - x_0 = h \equiv \Delta x$ diference argumentu (v bodě x_0);

$$f(x) - f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0) = \Delta f(x_0, h) \equiv \Delta f \text{ diference funkce } f \text{ v bodě } x_0.$$

Značení: $y = f(x) \Rightarrow \Delta f \equiv \Delta y = \dots$ atd.

Termíny: přírůstek, úbytek funkce.

Pro pevné x_0 je $\Delta f(x_0, h)$ funkcí h , tj. diference funkce je funkcí diference argumentu.

Příklady.

$$f(x) = x^2: \Delta f(x_0, h) = (x_0 + h)^2 - x_0^2 = 2x_0h + h^2 ;$$

$$f(x) = \sin x: \Delta f(x_0, h) = \sin(x_0 + h) - \sin x_0 = 2 \cos(x_0 + \frac{h}{2}) \sin \frac{h}{2} .$$

Funkce $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ se nazývá poměrná (relativní) diference (= "průměrná" změna funkce). Značí se také stručně: $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ a je to funkce proměnné $h = x - x_0$.

Definice 6.1.

(1) Řekneme, že funkce f definovaná na okolí $U(x_0)$ má v bodě x_0 derivaci, existuje-li konečná limita ($x_0 + h \in U(x_0)$)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) = f' \Big|_{x=x_0} .$$

Tato limita říkáme derivace funkce f v bodě x_0 .

Není-li tato limita konečná nebo neexistuje-li, říkáme, že funkce f nemá v bodě x_0 derivaci. V případě jednostranné limity hovoříme o jednostranné derivaci.

(2) Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 diferenciál, existuje-li číslo A a funkce $\omega(h) \equiv \omega(x - x_0)$ taková, že platí

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = A \cdot h + \omega(h) , \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\omega(h)}{h} = 0 .$$

Číslo A je (první) derivace funkce f v bodě x_0 a lineární funkcí Ah proměnné h říkáme (první) diferenciál funkce f v bodě x_0 a značíme jej

$$df(x_0, h) = Ah \ .$$

Příklad.

Pro $f(x) = x^3$ v bodě x_0 :

$$f(x) - f(x_0) = (x_0 + h)^3 - x_0^3 = \underbrace{3x_0^2 h}_{Ah} + \underbrace{3x_0 h^2 + h^3}_{\omega(h)} \ ,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x_0^2 h + 3x_0 h^2 + h^3}{h} = 3x_0^2 \ , \text{ tj.}$$

$$df(x_0, h) = 3x_0^2 h \ , \ f'(x_0) = 3x_0^2 \ .$$

Věta 6.1 (derivovatelnost a diferencovatelnost). Funkce f má v bodě x_0 derivaci (je derivovatelná) právě tehdy, když má v tomto bodě diferenciál (je diferencovatelná).

Důkaz. a) Nechť f je diferencovatelná. Potom existuje lineární funkce Ah (tj. existuje číslo A) a funkce $\omega(h)$ s vlastností $\frac{\omega(h)}{h} \rightarrow 0$ a platí

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = Ah + \omega(h) \ .$$

Potom

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = A + \frac{\omega(h)}{h} \ .$$

Protože existuje limita pravé strany, musí existovat i limita levé strany a platí

$$f'(x_0) = A \ ,$$

tedy existuje derivace funkce f v bodě x_0 .

b) Nechť obráceně funkce f má derivaci v x_0 , tj. existuje konečná limita

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \ , \text{ tj.}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h} \right| = 0 \ .$$

Existuje tedy funkce $\omega(h) = f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h$ taková, že $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\omega(h)}{h} = 0$. Tedy funkce f je diferencovatelná.

Poznámky (důležité!).

1. Diferenciál funkce f představuje hlavní (lineární) část přírůstku (úbytku) funkce f a rovnost

$$\Delta f(x_0, h) \equiv f(x_0+h) - f(x_0) = f'(x_0)h + \omega(h)$$

užíváme k přibližnému určení difference funkce:

$$\Delta f \approx df$$

v bodě x_0 , když $h = dx$ je malé!

2. Pro funkci $f(x) = x$ je $x_0+h-x_0 = Ah + \omega(h)$, a tedy

$$\omega(h) \equiv 0, \quad A = 1 \Rightarrow Ah = dx \Rightarrow \boxed{h = dx}$$

= proměnná h je diferenciálem argumentu.

Potom pro obecnou funkci f píšeme

$$\boxed{df(x_0, h) = f'(x_0)dx} \Rightarrow f'(x_0) = \frac{df(x_0, h)}{dx}.$$

Příklady (základní fakta).

Nechť D je definiční obor uvažovaných funkcí.

1. $f(x) = c$: $\Delta f = 0 = 0 \cdot h \Rightarrow (c') = 0$, $dx = 0$.

Derivace a diferenciál konstantní funkce jsou nulové.

2. $f(x) = x^2$: $\Delta f = (x_0+h)^2 - x_0^2 = 2x_0h + h^2 = (x^2)'_{x_0} = 2x_0$,
 $d(x^2)_{x_0} = 2x_0 dx$.

3. $f(x) = \sin x$: $\Delta f = 2\cos(x_0 + \frac{h}{2})\sin \frac{h}{2}$; $\frac{\Delta f}{h} \rightarrow \cos x_0$,

$$(\sin x)'_{x_0} = \cos x_0,$$

$$d(\sin x)_{x_0} = \cos x_0 \cdot h.$$

4. $f(x) = e^x$: $\Delta f = e^{x_0+h} - e^{x_0} = e^{x_0}(e^h - 1)$,

$$\Rightarrow f'(x_0) = e^{x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x_0}(e^h - 1)}{h},$$

$$d(e^x)_{x_0} = e^{x_0} \cdot h = e^{x_0} dx.$$

$$\begin{aligned}
 5. f(x) = a^x, a > 0: \Delta f &= a^x - a^{x_0} = a^{x_0}(a^h - 1), \\
 f'(x_0) &= a^{x_0} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^{x_0} \ln a, \\
 d(a^x)_{x_0} &= a^{x_0} \ln a \cdot h \equiv a^{x_0} \ln a \, dx.
 \end{aligned}$$

Věta 6.2. Je-li funkce f diferencovatelná v bodě x_0 , je v tomto bodě spojitá.

Důkaz. Podle předpokladu existuje A a funkce $\omega(h)$ taková, že

$$\begin{aligned}
 \frac{\omega(h)}{h} &\rightarrow 0 \quad \text{a platí} \\
 f(x_0+h) - f(x_0) &= Ah + \omega(h).
 \end{aligned}$$

Protože limita pravé strany je 0, pak

$$\lim_{h \rightarrow 0} [f(x_0+h) - f(x_0)] = 0.$$

Poznámka. Ze spojitosti neplyne diferencovatelnost! Např. funkce $f(x) = |x|$ je spojitá v každém bodě $x \in \mathbb{R}$. Avšak

$$\begin{aligned}
 f'(0+) &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{|0+h| - |0|}{h} = 1, \\
 f'(0-) &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{-h}{h} = -1,
 \end{aligned}$$

tj. $f'(0+) \neq f'(0-)$: derivace v bodě 0 neexistuje.

Věta 6.3 (pravidla derivování a diferencování).

(derivování = určení derivace, diferencování = určení diferenciálu).
Nechť funkce f a g jsou diferencovatelné v nějakém bodě x_0 společného definičního oboru D . Potom v tomto bodě jsou diferencovatelné i funkce

$$cf, f \pm g; f \cdot g, \frac{f}{g} \quad (g \neq 0)$$

a platí:

$(cf)' = cf', c \text{ konst.}$ $(f \pm g)' = f' \pm g',$ $(fg)' = f'g + fg',$ $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}, g \neq 0$	$d(cf) = cdf,$ $d(f \pm g) = df \pm dg,$ $d(fg) = fdg + gdf,$ $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gdf - fdg}{g^2}, g \neq 0$
---	--

$$\begin{aligned} \text{Důkaz. } (fg)(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0+h)g(x_0) + f(x_0+h)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0+h) \cdot \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} g(x_0) \cdot \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \end{aligned}$$

$= f(x_0)g'(x_0) + g(x_0)f'(x_0)$, protože f je spojitá funkce.
Podobně postupujeme i v ostatních případech.

Derivaci v bodě x_0 jsme definovali jako jistou limitu, tj. číslo.

Jestliže funkce f má derivaci v každém bodě $x \in I$, potom funkci $g: I \rightarrow \mathbb{R}$, která každému $x \in I$ přiřazuje číslo

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) , \text{ nazýváme také derivací a značí se } f'(\equiv g) .$$

Je-li funkce f' spojitá v I , říkáme, že funkce f je spojitě diferencovatelná v I (tzv. hladká funkce), tj. platí:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = f'(x_0) , \text{ pro každé } x_0 \in I .$$

Věta 6.4 (derivace a diferenciál složené funkce). Mějme složenou funkci $F = g \circ f = g(f(x))$ (definice 4.6) a existují derivace $f'(x_0)$ a $g'(y_0)$, kde $y_0 = f(x_0)$. Potom existuje derivace $F'(x_0) = [g(f(x))]_{x_0}'$ a platí

$$F'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0) ,$$

$$dF(x_0, h) = dg(f(x))_{x_0} = g'(y_0) \cdot f'(x_0)h .$$

Píšeme také: $dF = g'(y_0)df$.

Důkaz (stručný nástin).

$$\begin{aligned} y = f(x): \Delta x &= x - x_0 , \\ \Delta y &= y - y_0 = f(x) - f(x_0) , \\ z = g(y): \Delta z &= z - z_0 = g(y) - g(y_0) . \end{aligned}$$

Předpoklady: $\Delta y = y - y_0 = f(x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \omega_1(\Delta x)$,
 $\Delta z = z - z_0 = g(y) - g(y_0) = g'(y_0)\Delta y + \omega_2(\Delta y)$.

Potom

$$\begin{aligned} z - z_0 &= g(f(x)) - g(f(x_0)) = \\ &= g'(y_0) \underbrace{[f'(x_0)\Delta x + \omega_1(\Delta x)]}_{f(x) - f(x_0)} + \omega_2(\Delta y) = \\ &= g'(y_0)f'(x_0)\Delta x + \underbrace{g'(y_0)\omega_1(\Delta x) + \omega_2(f'(x_0)\Delta x + \omega_1(\Delta x))}_{\eta(\Delta x)} \end{aligned}$$

Pravidlo: $\frac{dg(f(x))}{dx} = \frac{dg}{dy} \cdot \frac{df}{dx}$.

Věta 6.5 (derivace inverzní funkce). Nechť diferencovatelná funkce f je prostá v I a je $f'(x) \neq 0$, $x \in I$.

Potom inverzní funkce f^{-1} je také diferencovatelná (a prostá) a platí

$$[f^{-1}(y)]' = \frac{1}{[f'(x)]'}$$

kde $y = f(x)$, $x \in I$, $y \in H$, $x = f^{-1}(y)$, $y \in H \equiv f(I)$.

Princip důkazu Vezmeme složenou funkci $y = f(f^{-1}(y))$, resp. funkci $x = f^{-1}(f(x))$. Potom podle předcházející věty 6.4 dostáváme

$$1 = [f^{-1}(y)]' f'(x) \quad , \quad \text{tj.} \quad (f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)}$$

Příklad.

$$y = \arcsin x \quad , \quad x \in \langle -1, 1 \rangle \quad , \quad y \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle \Rightarrow x = \sin y ;$$

$$x_0 = \sin y_0 \quad .$$

$$(\arcsin x)'_{x_0} = \frac{1}{(\sin y)'_{y_0}} = \frac{1}{\cos y_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y_0}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x_0^2}} \quad .$$

$$\text{Tedy} \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad , \quad x \in (-1, 1) \quad . \quad (y_0 \neq \pm \frac{\pi}{2})$$

6.2. Derivace a diferenciály elementárních funkcí.

1. $(e^x)' = e^x$; $x \in \mathbb{R}$.

2. $(a^x)' = a^x \ln a$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$;

$$a^x = e^{x \ln a} \Rightarrow (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} \cdot \ln a \quad (\text{derivace složené funkce}).$$

3. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$; $x \in (0, +\infty)$.

Z definice: $\frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \frac{z-y}{e^z - e^y} = \frac{1}{\frac{e^z - e^y}{z-y}} \rightarrow \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$,

$y = \ln x$; $z = \ln(x+h)$,
 $x = e^y$; $x+h = e^z$, $h = e^z - e^y$,

$h \rightarrow 0 \Leftrightarrow z \rightarrow y$.

4. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in (0, +\infty)$,

$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ a odtud plyne uvedený vzorec.

5. $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$, $x \in (0, +\infty)$, $\alpha \in \mathbb{R}$,

$(x^n)' = nx^{n-1}$; $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

6. $(\sin x)' = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$,

7. $(\cos x)' = -\sin x$; $x \in \mathbb{R}$,

8. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$; $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, k celé

9. $(\operatorname{cotg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$, $x \neq k\pi$, k celé

x v obloukové míře.

10. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1, 1)$

$y = \arcsin x$; $x \in \langle -1, 1 \rangle$; $y \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$,

$x = \sin y \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| \neq 1$.

11. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $x \in (-1, 1)$.

12. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$; $x \in \mathbb{R}$.

13. $(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

14. $(\sinh x)' = \cosh x$, $x \in \mathbb{R}$.

15. $(\cosh x)' = \sinh x$, $x \in \mathbb{R}$.

16. $(\operatorname{tgh} x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$, $x \in \mathbb{R}$.

17. $(\operatorname{cotgh} x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x}$, $x \neq 0$.

$$18. (\operatorname{argsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$19. (\operatorname{argcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad x \in (1, +\infty),$$

$$x = \cosh y; \quad y \in \mathbb{R}; \quad x \in (1, +\infty),$$

$$\frac{dx}{dy} = \sinh y = \sqrt{\cosh^2 y - 1} = \sqrt{x^2 - 1}.$$

$$20. (\operatorname{argtgh} x)' = \frac{1}{1-x^2}, \quad x \in (-1, 1).$$

$$21. (\operatorname{argcotgh} x)' = \frac{1}{1-x^2}, \quad x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty).$$

6.3. Fyzikální a geometrický význam derivace a diferenciálu.

Ve fyzice: Je-li f nějaká veličina závisající na x :

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \dots \text{relativní (poměrná) změna } f, \text{ tj. změna } f \text{ na jednotku délky;}$$

$$f'(x_0) \dots \text{místní (lokální) změna.}$$

Např.: $s = s(t)$... dráha závisající na čase;

$$\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t} \dots \text{změna dráhy na jednotku času } \equiv \text{průměrná rychlost;}$$

$$s'(t_0) \dots \text{okamžitá změna } \equiv \text{rychlost v okamžiku } t_0.$$

$$q = q(t) \dots \text{množství náboje proteklého řezem vodiče v čase } t;$$

$$q(t_0+\Delta t)-q(t_0) \dots \text{změna náboje za čas } \Delta t;$$

$$\frac{q(t_0+\Delta t)-q(t_0)}{\Delta t} \dots \text{průměrná změna toku } \equiv \text{změna náboje za jednotku času;}$$

$$q'(t_0) \dots \text{okamžitá změna náboje } \equiv \text{okamžitý tok } \equiv \text{proud } \equiv i(t_0).$$

Vyjádření fyzikálních zákonů (některých).

Rozpad radioaktivní látky:

Množství (hmotnost) radioaktivní látky závisí na čase.

$$m(t) \dots \text{hmotnost v okamžiku } t;$$

$$m(t_0) \dots \text{hmotnost v okamžiku } t_0.$$

Zákon rozpadu: Změna hmotnosti za jednotku času je přímo úměrná hmotnosti, přičemž hmotnost s časem ubývá:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{m(t_0 + \Delta t) - m(t_0)}{\Delta t} = \frac{dm}{dt} = -km, \quad k > 0.$$

Zákon hybnosti: $m(t)$... hmotnost tělesa v okamžiku t ;
 $v(t)$... rychlost tělesa.

$$\frac{d(mv)}{dt} = F(t).$$

Okamžitá (časová) změna hybnosti je rovna síle $F(t)$.

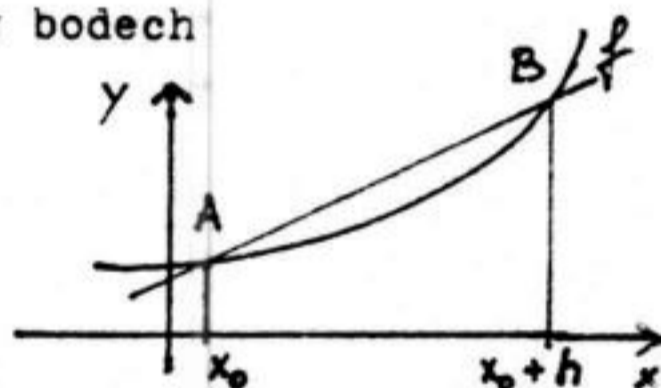
Geometrický význam derivace.

Rovnice sečny grafu funkce $y = f(x)$ v bodech

$$A = [x_0, f(x_0)],$$

$$B = [x_0 + h, f(x_0 + h)]:$$

$$y - f(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot (x - x_0).$$



Rovnice tečny grafu funkce $y = f(x)$ v bodě x_0 :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Rovnice normály grafu funkce $y = f(x)$ v bodě x_0 :

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

6.4. Základní věty diferenciálního počtu.

Definice 6.2. Funkce f nabývá v bodě $x_0 \in D(f)$ lokálního minima (resp. maxima), když existuje okolí $U_\delta(x_0)$ bodu x_0 takové, že

$$\text{resp. } \left. \begin{array}{l} f(x_0) \leq f(x), \\ f(x_0) \geq f(x), \end{array} \right\} \forall x \in U_\delta(x_0) \cap D(f).$$

Hovoříme o ostrém lokálním minimu, jestliže

$$f(x_0) < f(x), \quad \forall x \in U_\delta(x_0) \cap D(f), x \neq x_0.$$

Analogicky se definuje ostré lokální maximum.

Věta 6.6 (nutná podmínka existence extrému - Fermat). Mějme funkci f definovanou v bodě x_0 a jeho okolí. Když f nabývá v bodě x_0 svého lokálního minima (maxima) a existuje $f'(x_0)$, potom $f'(x_0) = 0$.

Důkaz. Je-li v bodě x_0 minimum, potom platí

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \quad \text{pro } x > x_0 : x \in (x_0, x_0 + \delta) ;$$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0 \quad \text{pro } x < x_0 : x \in (x_0 - \delta, x_0) .$$

Podle věty 4.6 (porovnávací) bude také $f'(x_0^+) \geq 0$, $f'(x_0^-) \leq 0$, a proto musí být $f'(x_0) = 0$.

Poznámka. Předpoklad "lokálnosti" extrému je nezbytný! Nejmenší hodnota v krajním bodě nemusí splňovat podmínku nulovosti derivace.

Věta 6.7 (věta o střední hodnotě - Rolle). Předpokládáme, že funkce f

1. je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$,
2. je diferencovatelná na otevřeném intervalu (a, b) ,
3. platí $f(a) = f(b)$.

Potom existuje aspoň jeden bod $\xi \in (a, b)$ takový, že $f'(\xi) = 0$.

Důkaz. Ze spojitosti funkce f na $\langle a, b \rangle$ plyne, že funkce f nabývá hodnot $m = \inf_{x \in \langle a, b \rangle} f(x)$, $M = \sup_{x \in \langle a, b \rangle} f(x)$ (Weierstrassova věta - věta 5.7).

Je-li $m = M$, potom je $f(x) = \text{konst}$ (tj. $f' = 0$) a za ξ lze vzít libovolný bod intervalu (a, b) .

Je-li $m \neq M$, potom je splněna aspoň jedna z nerovností:

$$f(a) = f(b) > m \quad ; \quad f(a) = f(b) < M .$$

Když např. $f(a) = f(b) < M$, potom bod ξ , v němž $f(\xi) = M$, nemůže být krajním bodem intervalu $\langle a, b \rangle$ a podle Fermatovy věty musí být $f'(\xi) = 0$.

Když $f(a) = f(b) > m$, potom bod ξ , v němž $f(\xi) = m$ nemůže být krajním bodem intervalu $\langle a, b \rangle$ a podle Fermatovy věty musí být $f'(\xi) = 0$.

Důsledek. Je-li funkce f spojitá v $\langle a, b \rangle$ a diferencovatelná v (a, b) , potom mezi dvěma kořeny (v $\langle a, b \rangle$) rovnice $f(x) = c$ (c je konstanta) leží kořen rovnice $f'(x) = 0$.

Věta 6.8 (věta o střední hodnotě - Lagrange). Předpokládáme, že funkce f

1. je spojitá na $\langle a, b \rangle$,
2. je diferencovatelná na (a, b) .

Potom existuje aspoň jeden bod $\xi \in (a, b)$ takový, že platí

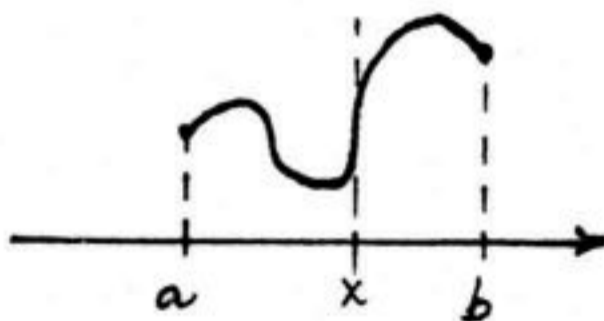
$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a).$$

Důkaz. Pro každou funkci f uvedených vlastností můžeme sestavit funkci

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a).$$

Funkce g je spojitá na $\langle a, b \rangle$, diferencovatelná na (a, b) a platí $g(a) = g(b) (=0)$. Potom podle Rolleovy věty existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že $g'(\xi) = 0$ a odtud plyne tvrzení věty.

Poznámka. ^{Tvrzení} Věta o střední hodnotě (i Rolleova) platí i tehdy, je-li v nějakém bodě intervalu (a, b) $f'(x) = \pm \infty$:



Důsledek 1. Funkce f je konstantní na (a, b) právě tehdy, když má na tomto intervalu derivaci a platí $f'(x) = 0$ pro všechna $x \in (a, b)$.

Důkaz. a) Derivace konstanty je nula.

b) Zvolme libovolné dva body $x_1 \neq x_2$ z (a,b) . Potom
 $\exists \xi(x_1, x_2): f(x_1) - f(x_2) = f'(\xi)(x_1 - x_2)$. Platí-li
 $f'(\xi) = 0$, pak $f(x_1) = f(x_2)$ pro libovolné $x_1, x_2 \in (a,b)$.

Důsledek 2. Nechť f je spojitá na $\langle a,b \rangle$ a diferencovatelná na (a,b) . Když pro všechna $x \in (a,b)$ platí $f'(x) \neq 0$ ($f'(x) > 0$, resp. $f'(x) < 0$), potom funkce f je na intervalu $\langle a,b \rangle$ prostá (rostoucí, resp. klesající).

Důkaz. Zvolme dva libovolné body $x_1 \neq x_2$ na (a,b) a nechť $f'(x) > 0$ na (a,b) , potom $f(x_1) - f(x_2) = f'(\xi)(x_1 - x_2) < 0$, když $x_1 < x_2$ a funkce f je tedy rostoucí. Podobně v případě $f'(x) < 0$ na (a,b) je f klesající.

Věta 6.9 (zobecněná věta o střední hodnotě - Cauchy). Předpokládáme, že funkce f a g jsou

1. spojité na $\langle a,b \rangle$,
2. diferencovatelné na (a,b) .

Potom existuje aspoň jeden bod $\xi \in (a,b)$ takový, že platí

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad g' \neq 0.$$

Důkaz. Rolleova věta se aplikuje na funkci

$$w(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x).$$

Důsledek (l'Hospitalovo pravidlo) (stručná formulace). Předpokládáme, že pro funkce f a g platí jeden z předpokladů

1. $\lim f(x) = \lim g(x) = 0$,
 2. $\lim f(x) = \lim g(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$),
- } buď $x \rightarrow x_0$,
 nebo $x \rightarrow +\infty$;
 $x \rightarrow -\infty$.

Jsou-li funkce f a g diferencovatelné v (prstencovém) okolí bodu x_0 (resp. $+\infty$) a existuje-li (i nevlastní)

$$\lim \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

potom existuje $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Poznámka. l'Hospitalovo pravidlo zahrnuje i jednostranné limity.

Příklad.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{x} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{\cos x}} =$$

$$= (-1) \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 = -\frac{1}{4}.$$

Příklad.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{x^2}{2}\right) = 0.$$

Poznámka. l'Hospitalovo pravidlo je tvrzení, které má tvar implikace. Uvědomte si, že v předpokladech tohoto tvrzení je mimo jiné existence limity

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Bez tohoto předpokladu totiž l'Hospitalovo pravidlo použít nelze (tvrzení neplatí). Z neexistence této limity nelze odvodit neexistenci původní limity $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Příklad.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} \sin \frac{1}{x}}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[6]{x} \sin \frac{1}{x} = 0.$$

Přitom však

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \sin \frac{1}{x} + \sqrt{x} \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cos \frac{1}{x}}{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}} =$$

$$= \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{3} \sqrt[6]{x} \sin \frac{1}{x}}_{= 0} - \underbrace{3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x\sqrt{x}} \cos \frac{1}{x}}_{\text{neexistuje}},$$

t.j. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ neexistuje!

6.5. Množiny spojitých a diferencovatelných funkcí.

Zde uvedeme několik elementárních pojmů a označení.

Symbolem $C(a,b)$, resp. $C(\langle a,b \rangle)$

budeme označovat množinu všech funkcí spojitých na intervalu (a,b) , resp. na $\langle a,b \rangle$.

Výrok $f \in C(a,b)$ znamená, že funkce f je spojitá na intervalu (a,b) .

Výrok $f \in C(\langle a,b \rangle)$ znamená, že f je spojitá na intervalu $\langle a,b \rangle$.

Platí: Když $f, g \in C(a,b)$, potom $f+g \in C(a,b)$, $\alpha f \in C(a,b)$ (viz věta 5.2).

Protože nulová funkce $\theta(x) \equiv 0$ je spojitá, tj. $\theta \in C(a,b)$, je množina $C(a,b)$ (stejně jako $C(\langle a,b \rangle)$) lineárním prostorem.

Symbolem $C^1(a,b)$, resp. $C^1(\langle a,b \rangle)$

označujeme množinu všech funkcí spojitě diferencovatelných na intervalu (a,b) , resp. na $\langle a,b \rangle$ (tj. funkcí f , u nichž f' je spojitá).

Množina $C^1(a,b)$, resp. $C^1(\langle a,b \rangle)$, je opět lineárním prostorem.

Platí: $C^1(a,b) \subset C(a,b)$.

Zobrazení, které každé funkci $f \in C^1(a,b)$ přiřazuje jedinou funkci $g \in C(a,b)$ takovou, že $g(x) = f'(x)$ pro každé $x \in (a,b)$, se nazývá operátorem derivování a značí se:

$$\frac{d}{dx} : f \rightarrow f'.$$

Např. $\frac{d}{dx} : \ln x \rightarrow \frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$,
 $\sin x \rightarrow \cos x$, $x \in \mathbb{R}$,
atd.

Uvedené zobrazení (operátor) je aditivní a homogenní, tj.

$$\frac{d}{dx} (f+g) = \frac{d}{dx} (f) + \frac{d}{dx} (g),$$

$$\frac{d}{dx} (\alpha f) = \alpha \frac{d}{dx} (f).$$

6.6. Primitivní funkce.

Definice 6.3. Je dána funkce $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$: otevřený, polouzavřený, uzavřený interval). Funkce $F: I \rightarrow \mathbb{R}$, pro niž platí

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I,$$

se nazývá primitivní funkcí k funkci f na množině I .

(V případných krajních bodech intervalu I jde o derivaci jednostrannou).

Příklad.

K funkci $f(x) = x^2 - \cos x$, $x \in \mathbb{R}$ je $F(x) = \frac{x^3}{3} - \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, funkcí primitivní.

Věta 6.10. Předpokládáme, že funkce F je primitivní funkcí k funkci f na I :

1. potom také každá funkce \tilde{F} tvaru $\tilde{F} = F + c$ (c je konstanta) je primitivní k funkci f na I ;

2. pro libovolný bod $x_0 \in I$ a pro každé číslo $y_0 \in \mathbb{R}$ existuje právě jedna primitivní funkce \tilde{F} k funkci f na I , pro níž platí $\tilde{F}(x_0) = y_0$ (graf funkce \tilde{F} prochází bodem $[x_0, y_0]$).

3. Funkce F je spojitá.

Důkaz. 1. Protože $(c)' = 0$ (z definice derivace) $\Rightarrow (F+c)' = F' = f$.

2. Nechť jsou dvě: F a G (různé): $F' = f$, $G' = f \Rightarrow F' - G' = 0 \Rightarrow (F-G)' = 0 \Rightarrow F-G = \text{konst.}$, tj. $G(x) = F(x) + c$.

Protože musí být $y_0 = F(x_0)$, $y_0 = G(x_0) = F(x_0) + c \Rightarrow c \equiv 0 \Rightarrow \Rightarrow F(x) \equiv G(x)$, a to je spor s předpokladem.

3. F je diferencovatelná, neboť F' existuje a je rovna $f \Rightarrow F$ je spojitá (věta 6.2).

Je-li F primitivní funkcí k funkci f , potom označujeme

$$\left\{ \tilde{F}: \tilde{F} = F + c, c \in \mathbb{R} \right\} = \int f(x) dx.$$

Tuto množinu obvykle nazýváme neurčitým integrálem a stručně

zapisujeme

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x)+c} \quad \text{a } c \text{ se nazývá } \underline{\text{integrační konstanta}}.$$

Platí:

$$\boxed{\begin{array}{l} 1. \int \alpha \cdot f(x)dx = \alpha \cdot \int f(x)dx, \\ 2. \int [f(x)+g(x)] dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx, \end{array}} \quad \left. \begin{array}{l} \underline{\text{homogenita}} \\ \underline{\text{aditivita}} \end{array} \right\} \underline{\text{linearita}}.$$

Důkaz. 1. Když $F'(x) = f(x)$, potom $(\alpha F)' = \alpha f$, tj.
 $\int \alpha f(x)dx = \alpha (F+c)$.

2. Když také $G' = g(x)$, potom $(F+G)' = f+g$, tj.
 $\int [f(x)+g(x)] dx = F(x)+G(x)+c = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.

6.7. Metody určování primitivní funkce (technika integrování).

Základní úlohy

Úloha 1. Dána funkce $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Najít funkci (funkce)
 $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ takovou, že $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$.

Úloha 2. Dána funkce $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ a čísla $x_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R}$.
 Najít funkci $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ takovou, že platí: $F'(x) = f(x)$,
 $F(x_0) = y_0$.

Příklad.

Dáno: $f(x) = \sin x$; $x_0 = \frac{\pi}{6}$, $y_0 = 2$;

$$F(x): F'(x) = \sin x, \\ F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2.$$

Řešení úlohy: $\int \sin x dx = \underbrace{-\cos x + c}_{F(x)}$. Určíme c : $-\cos \frac{\pi}{6} + c = 2$,

tj. $c = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}$. Tedy $F(x) = -\cos x + 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Tabulka základních vzorců:

$$1. \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad \alpha \neq -1, \quad \left\{ \begin{array}{l} x \in (-\infty, \infty), \text{ když } \alpha \text{ celé ne-} \\ \text{záporné;} \\ x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty), \text{ když} \\ \alpha \neq -1, \alpha \text{ celé záporné;} \\ x \in (0, +\infty), \text{ pro } \alpha \text{ necelé.} \end{array} \right.$$

$$2. \int e^x dx = e^x + C, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$3. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C: \begin{cases} \ln x + C_1, & x > 0 \\ \ln(-x) + C_2, & x < 0 \end{cases},$$

$$4. \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$5. \int \cos x dx = \sin x + C, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$6. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \quad x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},$$

$$7. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x + C, \quad x \neq k\pi,$$

$$8. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \quad x \in (-1, 1),$$

$$9. \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arccotg} x + C_1, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$10. \int \sinh x dx = \cosh x + C, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$11. \int \cosh x dx = \sinh x + C, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$12. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad a > 0, \quad a \neq 1,$$

$$13. \int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \operatorname{tgh} x + C, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$14. \int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\operatorname{cotgh} x + C, \quad x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty),$$

$$+) 15. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{argcosh} |x| + C = \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C, \quad x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty),$$

$$16. \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{argsinh} x + C = \ln|x + \sqrt{x^2+1}| + C, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$17. \int \frac{dx}{1-x^2} = \begin{cases} \operatorname{argtgh} x + C, & x \in (-1, 1) \\ \operatorname{argcotgh} x + C, & x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \end{cases}$$

+) Poznámka. K funkci $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ pro $x > 1$ je primitivní funkce

$\operatorname{argcosh} x + C$ a pro $x < -1$ je primitivní funkcí funkce

$\operatorname{argcosh} (-x) + C.$

Příklad.

Ukázka užití elementárních vzorců:

$$1. \int e^{3x} dx = \frac{1}{3} \int e^{3x} d(3x) = \frac{1}{3} e^{3x} + C .$$

$$2. \int \frac{dx}{5x^2+3} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\left(\frac{\sqrt{5x}}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} = \frac{1}{3} \int \frac{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} d\left(\frac{\sqrt{5x}}{\sqrt{3}}\right)}{\left(\frac{\sqrt{5x}}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{15}} \operatorname{arc_tg} \sqrt{\frac{5}{3}} x + C .$$

Věta 6.11 (integrace per partes - po částech). Nechť $u: I \rightarrow \mathbb{R}$, $v: I \rightarrow \mathbb{R}$ jsou diferencovatelné v intervalu I a existuje v I primitivní funkce k funkci uv' . Potom existuje primitivní funkce k funkci $u'v$ a platí

$$\int u'(x)v(x) dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x) dx ,$$

resp.

$$\int v du = uv - \int u dv .$$

Důkaz. Ve vnitřních bodech I platí

$$(uv)' = u'v + uv' \Rightarrow u'v = (uv)' - uv' .$$

K funkci $(uv)'$ je primitivní funkce uv , k funkci uv' primitivní funkce existuje a píšeme ji $\int uv' dx$. Odtud plyne příslušný vzorec.

Příklad.

$$1. \int x \sin x dx = \left| \begin{array}{l} u' = \sin x, u = -\cos x \\ v = x, v' = 1 \end{array} \right| = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C ,$$

$$2. \int \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u' = 1, u = x \\ v = \ln x, v' = \frac{1}{x} \end{array} \right| = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C ,$$

$x \in \mathbb{R};$
 $x \in (0, +\infty) .$

Užití věty 6.11.

1. Integrovaní per partes užíváme s úspěchem k hledání primitivních funkcí k funkcím typu:
 - a) $x^n \cos \omega x$, $x^n \sin \omega x$, $x^n e^{kx}$, $n \in \mathbb{N}$; $\omega, k \dots$ konstanty,
 - b) $e^{\alpha x} \cos \omega x$, $e^{\alpha x} \sin \omega x$, $\alpha, \omega \dots$ konstanty .

Lze odvodit vzorce:

$$\int e^{\alpha x} \cos \omega x \, dx = \frac{e^{\alpha x} (\omega \sin \omega x + \alpha \cos \omega x)}{\alpha^2 + \omega^2} + C ,$$

$$\int e^{\alpha x} \sin \omega x \, dx = \frac{e^{\alpha x} (\alpha \sin \omega x - \omega \cos \omega x)}{\alpha^2 + \omega^2} + C .$$

c) $x^n \arcsin x$, $x^n \arccos x$, $x^n \ln x$, $x^n \operatorname{arctg} x$,
 $x^n \operatorname{arccotg} x$ (konkrétní výpočty jsou ovšem často zdlouhavé).

2. Odvození rekurentních formulí:

a) $J_n = \int \cos^n x \, dx$; musíme znát: J_1, J_2 .

$$J_n = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} J_{n-2} ; n \geq 2 .$$

b) $J_n = \int \sin^n x \, dx$; musíme znát J_1, J_2 .

$$J_n = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} J_{n-2} , n \geq 2 .$$

c) $J_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$; musíme znát J_1 .

$$J_{n+1} = \frac{1}{2n} \left[\frac{x}{(1+x^2)^n} + (2n-1)J_n \right] , n \geq 1 .$$

Věta 6.12 (integrace substitucí). Nechť funkce $z = f(x)$ je diferencovatelná na intervalu X a zobrazuje jej do intervalu Z (tj. $f(X) \subset Z$), na kterém je definována funkce $g(z)$ a má na něm primitivní funkci $G(z)$. Potom platí

$$\int g(z) dz = \int g(f(x)) f'(x) dx = G(f(x)) + C .$$

Důkaz. Složená funkce $F(x) = G(f(x))$, $x \in X$ je podle předpokladu diferencovatelná

$$F'(x) = G'(z) f'(x) = g(z) f'(x) .$$

Proto primitivní funkcí k funkci $F'(x) = g(f(x)) f'(x)$ je funkce $F(x) = G(f(x))$.

Užití věty 6.12.

1. Chceme určit $\int g(z)dz$: Volíme vhodnou funkci $z = f(x)$ tak, aby výpočet integrálu $\int g(f(x))f'(x)dx$ v proměnné x byl jednodušší:

Příklad.

$$\int \sqrt{1-z^2} dz = \left| \begin{array}{l} z = \sin x \\ dz = \cos x dx \\ z \in (-1, 1) \end{array} \right| = \int \sqrt{1-\sin^2 x} \cdot \cos x dx = \int |\cos x| \cos x dx =$$

$$\left(\text{volíme } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow |\cos x| = \cos x \right)$$

$$= \int \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x) dx =$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + C = \frac{1}{2} \arcsin z + \frac{1}{4} \cdot 2z \sqrt{1-z^2} + C .$$

2. Chceme určit $\int g(f(x))f'(x)dx$: Část integrandu označíme $f(x) = z$ tak, aby výpočet integrálu $\int g(z)dz$ v proměnné z byl jednodušší:

Příklad.

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \left| \begin{array}{l} \cos x = z \\ -\sin x dx = dz \end{array} \right| = \int \frac{-dz}{z} = -\ln|z| + C =$$

$$= -\ln|\cos x| + C .$$

Zde obecně integrujeme v takovém intervalu I , ve kterém $\cos x \neq 0$.

Příklad.

$$\int \frac{x dx}{x^2-1} = \left| \begin{array}{l} x^2-1 = z \\ 2x dx = dz \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z} = \frac{1}{2} \ln|x^2-1| + C .$$

Integrály typu $\int R(x)dx$.

$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, P, Q jsou polynomy; $\text{st } P < \text{st } Q$.

Funkci $R(x)$ rozložíme na součet základních racionálních funkcí typu:

I. $\frac{A}{x-x_0}$; A, x_0 jsou konstanty;

- II. $\frac{A}{(x-x_0)^k}$, $A, x_0, k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ jsou konstanty;
- III. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$, A, B, p, q jsou konstanty (reálné), kořeny jmenovatele jsou komplexní (sdružené);
- IV. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$, $A, B, p, q, k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ jsou konstanty (reálné), kořeny jmenovatele jsou komplexní k -násobné.

Integrály typu $\int R(\sin x, \cos x) dx$.

Každý integrál uvedeného typu (integrand je racionální funkce v sinech a kosinech) lze převést na integrál z racionální lomené funkce univerzální substitucí: v intervalech neobsahující body $x_k = (2k+1)\pi$, k celé:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t &\Rightarrow x = 2 \operatorname{arctg} t, \\ \cos x &= \frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \quad dx = \frac{2 dt}{1+t^2}; \end{aligned}$$

Někdy stačí speciálnější substituce: používá se v případě, že $R(\sin x, \cos x) = R(-\sin x, -\cos x)$.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x = t &\Rightarrow x = \operatorname{arctg} t, \\ \sin^2 x &= \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}. \end{aligned}$$

Někdy dokonce stačí substituce $\cos x = t$ nebo $\sin x = t$, a to v případech, kdy

$$\begin{aligned} R(-\sin x, \cos x) &= -R(\sin x, \cos x) \quad \text{nebo} \\ R(\sin x, -\cos x) &= -R(\sin x, \cos x). \end{aligned}$$

Poznámka. Zkoušíme nejdříve speciálnější substituce. Univerzální substitucí užíváme v "krajní nouzi".

Příklad.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\cos^4 x} &= \left| \operatorname{tg} x = t \right| = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{1}{(1+t^2)^2}} = \int \frac{(1+t^2)^2}{1+t^2} dt = \int (1+t^2) dt = \\ &= t + \frac{t^3}{3} + C = \operatorname{tg} x + \frac{1}{3} \operatorname{lg}^3 x + C. \end{aligned}$$

Příklad.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \right| = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C .$$

Integrály typu:

$$\left. \begin{array}{l} \int \cos mx \cos nx \, dx \\ \int \sin mx \cos nx \, dx \\ \int \sin mx \sin nx \, dx \end{array} \right\} m, n \text{ celé .}$$

Užije se vzorců:

$$\begin{aligned} \cos mx \cos nx &= \frac{1}{2} [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x] , \\ \sin mx \cos nx &= \frac{1}{2} [\sin(m+n)x + \sin(m-n)x] , \\ \sin mx \sin nx &= \frac{1}{2} [-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x] . \end{aligned}$$

Příklad.

$$\begin{aligned} \int \sin 5x \sin 3x \, dx &= \frac{1}{2} \int [-\cos 8x + \cos 2x] \, dx = \\ &= -\frac{1}{16} \sin 8x + \frac{1}{4} \sin 2x + C . \end{aligned}$$

Integrály typu $\int R(\sqrt{1-x^2}) \, dx$.

Užije se substituce: $x = \sin t$ nebo $x = \cos t$

a vzorců: $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$; $\sin 2t = 2 \sin t \cdot \cos t$,
 $\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t$.

Integrály typu $\int R(\sqrt{1+x^2}) \, dx$.

Užije se substituce: $x = \sinh t$ a vzorců:

$$\begin{aligned} \cosh^2 t - \sinh^2 t &= 1 , \quad \cosh t = \sqrt{1 + \sinh^2 t} , \\ \cosh^2 t + \sinh^2 t &= \cosh 2t . \end{aligned}$$

Integrály typu $\int R(\sqrt{x^2-1}) \, dx$.

Užije se substituce: $x = \cosh t$ a vzorců:

$$\begin{aligned} \cosh^2 t - \sinh^2 t &= 1 , \quad \sinh t = \sqrt{\cosh^2 t - 1} , \\ \cosh^2 t + \sinh^2 t &= \cosh 2t . \end{aligned}$$

7. Newtonův integrál.

7.1. Základní vlastnosti.

Definice 7.1. Nechť k funkci $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ existuje na I primitivní funkce $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ a nechť $\langle a, b \rangle \subset I$. Číslo $J(f, a, b) = F(b) - F(a)$ nazýváme Newtonovým určitým integrálem funkce f přes interval $\langle a, b \rangle$ a značíme

$$[F(x)]_a^b = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f ; \quad a \dots \text{dolní mez}, \quad b \dots \text{horní mez}.$$

Výše uvedený vztah je tzv. Newtonova-Leibnizova formule (vzorec).

Věta 7.1. Newtonův integrál nezávisí na výběru primitivní funkce.

Důkaz. Nechť $F_1 \neq F_2$ a platí $F_1' = F_2' = f$. Proto $F_2(x) = F_1(x) + c$, c je libovolná konstanta

$$\Rightarrow F_2(b) - F_2(a) = F_1(b) - F_1(a).$$

Označíme $\mathcal{N}(I)$ množinu všech funkcí f , k nimž existuje Newtonův integrál, tj. které jsou newtonovsky integrovatelné.

Takže výroky

$$f \in \mathcal{N}(\langle a, b \rangle) \quad ; \quad \text{existuje} \quad \int_a^b f(x) dx \equiv F(b) - F(a)$$

jsou ekvivalentní.

Věta 7.2. Pro $a, b, c \in I$, $f \in \mathcal{N}(I)$ platí:

1. $\int_a^b f = - \int_b^a f$;

2. $\int_a^a f = 0$;

3. $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Důkaz. 1. $F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b))$;

2. $F(a) - F(a) = 0$;

3. $F(b) - F(a) = F(c) - F(a) + [F(b) - F(c)]$.

Věta 7.3. 1. Když $f \in \mathcal{M}(\langle a, b \rangle)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, potom $\alpha f \in \mathcal{M}(\langle a, b \rangle)$

a platí $\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f$.

2. Když $f_1, f_2 \in \mathcal{M}(\langle a, b \rangle)$, potom $f_1 + f_2 \in \mathcal{M}(\langle a, b \rangle)$ a platí

$$\int_a^b (f_1 + f_2) = \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2.$$

Říkáme, že množina $\mathcal{M}(\langle a, b \rangle)$ je lineární prostor.

Důkaz. 1. $\alpha F(b) - \alpha F(a) = \alpha [F(b) - F(a)]$;

2. $F_1(b) - F_1(a) + F_2(b) - F_2(a) = [F_1(b) + F_2(b)] - [F_1(a) + F_2(a)]$,

kde $F_1' = f_1$, $F_2' = f_2$.

Příklad.

$$\int_1^3 \ln x \, dx = [x \ln x - x]_1^3 = 3 \ln 3 - 3 - 1 \ln 1 + 1 = 3 \ln 3 - 2.$$

Příklad.

$$\int_0^{\pi/4} \sin 5x \sin 3x \, dx = \left[-\frac{1}{16} \sin 8x + \frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^{\pi/4} = -\frac{1}{16} \sin 2\pi + \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{2} = \frac{1}{4}.$$

Věta 7.4 (Per partes v Newtonově integrálu). Nechť funkce $u = u(x)$, $v = v(x)$ jsou diferencovatelné na $\langle a, b \rangle$ a nechť $uv' \in \mathcal{M}(\langle a, b \rangle)$. Potom také $u'v \in \mathcal{M}(\langle a, b \rangle)$ a platí

$$\int_a^b u'(x)v(x) \, dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) \, dx.$$

Důkaz. Flyne z rovnosti $u'v = (uv)' - uv'$.

Věta 7.5 (Substituce v Newtonově integrálu). Nechť $g \in \mathcal{M}(Z)$ a nechť funkce $z = f(x)$ je diferencovatelná na intervalu X , přičemž $f(X) \subset Z$. Potom pro $\langle a, b \rangle \subset X$ platí

$$\int_a^b g(f(x))f'(x) \, dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g(z) \, dz.$$

Důkaz. Flyne z věty 6.12.

Příklad.

$$\int_{-1}^2 3x \sin(x^2+1) dx = \left. \begin{array}{l} x^2+1 = t \\ 2x dx = dt \\ \langle -1, 2 \rangle \rightarrow \langle 2, 5 \rangle \end{array} \right| = \frac{3}{2} \int_2^5 \sin t dt = \frac{3}{2} \cdot [-\cos t]_2^5 = \\ = \frac{3}{2} (\cos 2 - \cos 5) .$$

Příklad.

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \left. \begin{array}{l} x = \sin t \\ dx = \cos t dt \\ x \in \langle 0, 1 \rangle \Rightarrow t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle, \\ \text{nebo } t \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle \end{array} \right| = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \\ = \int_{t_1}^{t_2} |\cos t| \cos t dt = \begin{cases} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} , \\ - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^2 t dt = - \left[\frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin 2t \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = - \frac{\pi}{4} . \end{cases}$$

Který výsledek je správný? Kde je chyba? Špatné pořadí mezí!

Definice 7.2. Nechť $a, x \in I$ a $f \in \mathcal{N}(I)$. Potom primitivní funkci F k funkci f určenou vztahem

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(t) dt$$

nazýváme integrálem s proměnnou horní mezí.

Důsledek. $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = F'(x) = f(x) ;$

$$\frac{d}{dx} \int_x^b f(t) dt = -F'(x) = -f(x) ;$$

$$\frac{d}{dx} \int_a^{\varphi(x)} f(t) dt = \frac{d}{dx} [F(\varphi(x)) - F(a)] = \\ = F'(\varphi(x)) \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \varphi'(x) .$$

Příklad.

$$1. \int_a^x \sin t dt = -\cos x + \cos a ;$$

$$2. \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt = F(x) ; F'(x) = \frac{\sin x}{x} .$$

Funkce $F(x)$ je uvedeným integrálem definována.

Definice 7.3. Nechť $f \in \mathcal{M}(\langle a, x \rangle)$ pro každé $x > a$.
Existuje-li $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$, potom $\lim_{x \rightarrow +\infty} [F(x) - F(a)]$ nazýváme
nevlastním Newtonovým integrálem vlivem meze a značíme

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt = \int_a^{+\infty} f(t) dt .$$

Analogicky definujeme $\int_{-\infty}^x f(t) dt$; $\int_{-\infty}^c f(t) dt = \lim_{y \rightarrow -\infty} \int_y^c f(t) dt +$
 $+ \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_c^x f(t) dt$. Říkáme také, že nevlastní integrál $\int_a^{+\infty} f(t) dt$
konverguje. Neexistuje-li $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ (např. je nevlastní),
říkáme, že nevlastní integrál diverguje (neexistuje!).

Příklady.

$$\int_1^{+\infty} e^t dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x e^t dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} [e^x - e^1] = +\infty : \text{diverguje ,}$$

$$\int_1^{+\infty} e^{-t} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} [-e^{-t}]_1^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} [-e^{-x} + e^{-1}] = e^{-1} : \text{konverguje ,}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{dt}{t^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} [-\frac{1}{t}]_1^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} [-\frac{1}{x} + 1] = 1 : \text{konverguje .}$$

Definice 7.4. Mějme interval $\langle a, b \rangle$ a nechť $f \in \mathcal{M}(\langle a, x \rangle)$
pro každé $x \in \langle a, b \rangle$, avšak $f \notin \mathcal{M}(\langle a, b \rangle)$ (tj. rovnost $F'(x) =$
 $= f(x)$ platí pouze pro $x \in \langle a, b \rangle$).

Existuje-li $\lim_{x \rightarrow b-} F(x)$, potom $\lim_{x \rightarrow b-} [F(x) - F(a)]$ nazýváme ne-
vlastním Newtonovým integrálem vlivem funkce a značíme

$$\lim_{x \rightarrow b-} \int_a^x f(t) dt = \int_a^b f(t) dt .$$

Opět říkáme, že nevlastní integrál konverguje. Pokud $\lim_{x \rightarrow b-} F(x)$
neexistuje, říkáme, že nevlastní integrál diverguje.

Příklad.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 1-} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-t}} = \lim_{x \rightarrow 1-} [-2\sqrt{1-t}]_0^x = \lim_{x \rightarrow 1-} [-2\sqrt{1-x} + 2] = 2 .$$

Další příklady:

$$1. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^{+\infty} = \operatorname{arctg} (+\infty) - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{2},$$

$$2. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^c \frac{dx}{1+x^2} + \int_c^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = [\operatorname{arctg} c - \operatorname{arctg} (-\infty)] + [\operatorname{arctg} (+\infty) - \operatorname{arctg} c] = \pi.$$

Příklad.

Pro jaké α integrál $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ konverguje?

$$\text{Pro } \alpha > 1: \int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_1^x = \frac{1}{\alpha-1} + \frac{1}{1-\alpha} \cdot \frac{1}{x^{\alpha-1}}, \quad \underline{x > 1}:$$

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} \dots \underline{\text{konverguje.}}$$

$$\text{Pro } \alpha = 1: \int_1^x \frac{dt}{t} = \ln x; \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} \underline{\text{diverguje.}}$$

$$\text{Pro } \alpha < 1: \int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} + \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \dots \text{kladný exponent}$$

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \underline{\text{diverguje.}}$$

Například $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ konverguje; $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ divergují.

Příklad.

Pro jaké β integrál $\int_0^1 \frac{dx}{x^\beta}$ konverguje?

$$\text{Pro } \beta > 1: \int_\epsilon^1 \frac{dx}{x^\beta} = \left[\frac{x^{1-\beta}}{1-\beta} \right]_\epsilon^1 = \frac{1}{1-\beta} - \frac{\epsilon^{1-\beta}}{1-\beta}, \quad 1-\beta < 0$$

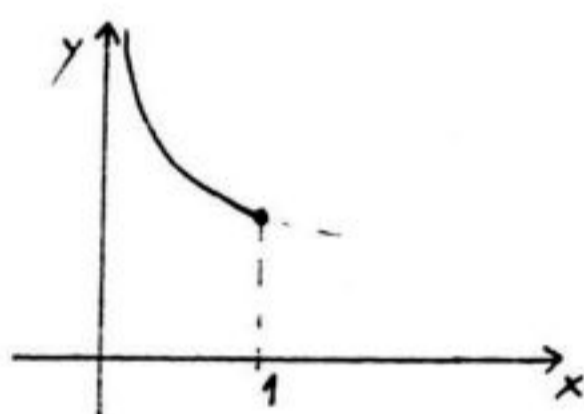
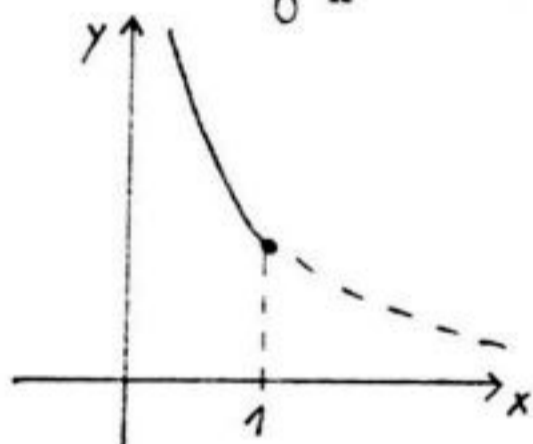
$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{x^\beta} \underline{\text{diverguje.}}$$

Pro $\beta = 1$: $\int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} = \ln 1 - \ln \varepsilon \Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{x}$ diverguje.

Pro $0 < \beta < 1$: $\int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x^{\beta}} = \left[\frac{x^{1-\beta}}{1-\beta} \right]_{\varepsilon}^1 = \frac{1}{1-\beta} - \frac{\varepsilon^{1-\beta}}{1-\beta}$,

$\Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{x^{\beta}}$ konverguje.

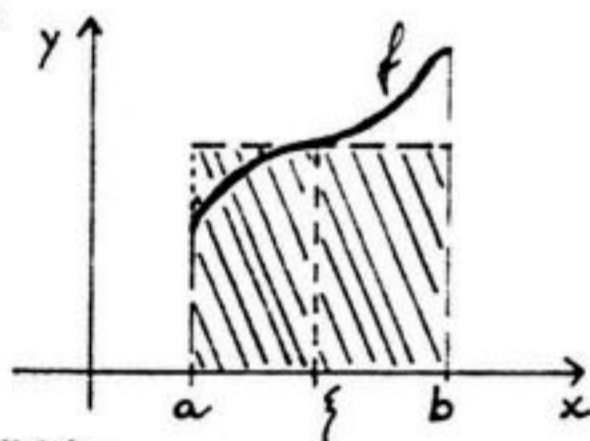
Například $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ diverguje, $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ konverguje.



7.2. Základní věty integrálního počtu.

Věta 7.6 (o střední hodnotě). Je-li $f \in \mathcal{N}(\langle a, b \rangle)$, potom existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že platí

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a).$$



Důkaz. Pro $f \in \mathcal{N}(\langle a, b \rangle)$ existuje primitivní funkce F na $\langle a, b \rangle$, tj. $F'(x) = f(x)$, pro $x \in \langle a, b \rangle$, tj. v každém vnitřním bodě je F diferencovatelná oboustranně a dále F je spojitá na $\langle a, b \rangle$. Tedy existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že $F(b) - F(a) = F'(\xi)(b-a) = f(\xi)(b-a)$.

Poznámka (definiční). Číslo $\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ se nazývá

střední hodnotou funkce f na $\langle a, b \rangle$. Věta 7.6 říká, že pro $f \in \mathcal{N}(\langle a, b \rangle)$ je střední hodnota rovna funkční hodnotě funkce f v nějakém vnitřním bodě.

Příklad.

Je dána funkce $i(t) = I_0 \sin \omega t = I_0 \sin \frac{2\pi}{T} t$. Stanovme střední hodnotu funkce $i^2(t)$ na intervalu $\langle 0, T \rangle$, T je perioda.

$$\int_0^T i^2(t) dt = I_0^2 \int_0^T \sin^2 \frac{2\pi}{T} t dt = I_0^2 \int_0^T \frac{1 - \cos \frac{4\pi}{T} t}{2} dt =$$

$$= I_0^2 \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin \frac{4\pi t}{T}}{2 \cdot \frac{4\pi}{T}} \right]_0^T = I_0^2 \cdot \frac{T}{2} .$$

Tedy $\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt = \frac{I_0^2}{2}$ je střední hodnota funkce $i^2(t)$.

Definujeme: $\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}$, tzv. efektivní hodnota funkce $i(t)$.

Důsledky věty o střední hodnotě:

Důsledek 1. Zvolme na $\langle a, b \rangle$ body (tzv. dělení D intervalu $\langle a, b \rangle$):

$$(D) \quad x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b; \Delta x_k = x_{k+1} - x_k .$$

Pro $f \in \mathcal{M}(\langle a, b \rangle)$ je $f \in \mathcal{M}(\langle x_k, x_{k+1} \rangle)$ pro libovolné dělení D . Potom

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) (x_{k+1} - x_k); \xi_k \in (x_k, x_{k+1}) .$$

Důsledek 2. Nechť $f \in \mathcal{M}(\langle a, b \rangle)$ a $f(x) \geq 0, x \in \langle a, b \rangle$.

Potom platí

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0 .$$

Důkaz. $F(b) - F(a) = f(\xi)(b-a) \geq 0$, neboť $f(\xi) \geq 0$.

Důsledek 3. Pro $f, g \in \mathcal{M}(\langle a, b \rangle)$ a $f(x) \geq g(x), x \in \langle a, b \rangle$, platí:

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx .$$

Důkaz. Pro funkci $f(x)-g(x) \geq 0$ platí podle důsledku 2 nerovnost

$$\int_a^b [f(x)-g(x)] dx \geq 0 .$$

Důsledek 4. Nechť $g \in \mathcal{N}(a,b)$, $fg \in \mathcal{N}(a,b)$ a $g(x) \geq 0$, $m \leq f(x) \leq M$, $x \in \langle a,b \rangle$.

Potom

a) $m \cdot \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq M \cdot \int_a^b g(x) dx ;$

b) $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) .$

Důkaz. a) plyne z důsledku 3, užijeme-li nerovnost

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x) ;$$

b) plyne z a), vezmeme-li $g(x) \equiv 1$.

Důsledek 5. Nechť $f \in \mathcal{N}(\langle a,b \rangle)$, $|f| \in \mathcal{N}(\langle a,b \rangle)$. Potom platí

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx .$$

Důkaz. Protože $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, potom podle důsledku 3:

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx ,$$

což zapíšeme výše uvedeným způsobem.

Věta 7.7. Nechť $f \in \mathcal{N}(\langle a,b \rangle)$ a $f(x) \geq 0$ pro $x \in \langle a,b \rangle$ a předpokládáme navíc, že f není identicky nulová (tj. $f \not\equiv 0$).

Potom

$$\int_a^b f(x) dx > 0 .$$

Věta 7.8 (obecná věta o střední hodnotě). Nechť $f, g, fg \in \mathcal{N}(\langle a,b \rangle)$ a navíc $g(x) \geq 0$, pro $x \in \langle a,b \rangle$. Potom existuje takové

$\xi \in \langle a,b \rangle$, že platí

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \cdot \int_a^b g(x) dx .$$

Věta 7.9 (Fundamentální věta matematické analýzy). Je-li $f \in C(\langle a, b \rangle)$, potom $f \in \mathcal{N}(\langle a, b \rangle)$. Tj.

$$\boxed{C(\langle a, b \rangle) \subset \mathcal{N}(\langle a, b \rangle)} .$$

Důkaz provedeme později.

Definice 7.5. Zobecněnou primitivní funkcí k funkci f na intervalu $\langle a, b \rangle$ rozumíme takovou funkci F , pro niž platí:

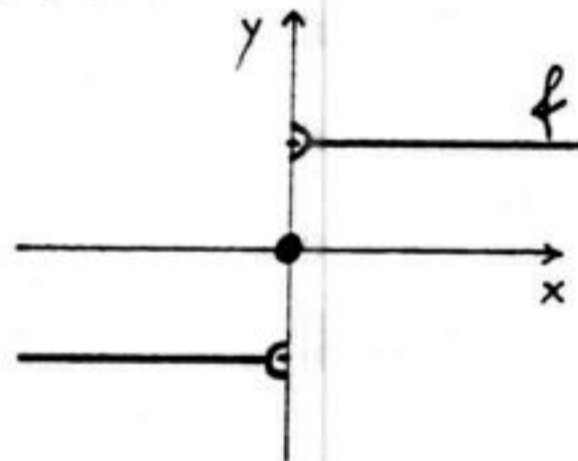
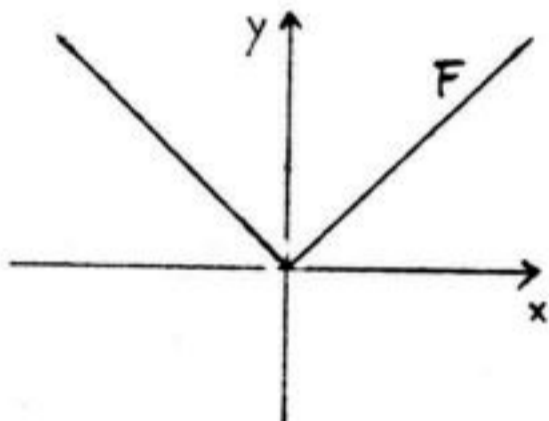
1. F je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$;
2. platí $F'(x) = f(x)$ na $\langle a, b \rangle$ s výjimkou nejvýše spočetně mnoha bodů.

Číslo $F(b) - F(a)$ pak nazýváme zobecněným Newtonovým integrálem.

Příklad.

Pro funkci $F(x) = |x|$ je $F'(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$;

tj. $F'(x) = f(x) = \text{sgn } x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$;



Rovnost $F'(x) = f(x)$ neplatí pouze v bodě $x = 0$, tj. $|x|$ je zobecněnou primitivní funkcí k funkci $\text{sgn } x$.

Dá se dokázat, že k omezené funkci f , která má na $\langle a, b \rangle$ konečný počet bodů nespojitosti (1. druhu), existuje zobecněná primitivní funkce.

Definicemi 7.3, 7.4 byl zaveden pojem nevlastního (Newtonova) integrálu:

1. vlivem funkce: $\int_a^b f(x) dx = \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t) dt$:

Zde předpokládáme, že funkce f je v okolí bodu b neomezená - "singularita v bodě b ".

Zcela analogicky se definuje nevlastní integrál "se singularitou" na dolní mezi.

Je-li f neomezená v okolí vnitřního bodu $c \in (a, b)$, potom užijeme vlastnosti:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx .$$

Příklad.

$$\int_{-1}^2 \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{|x|}} + \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \int_{-1}^x \frac{dt}{\sqrt{-t}} + \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^2 \frac{dt}{\sqrt{t}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} [-2\sqrt{-x} + 2\sqrt{1}] + \lim_{x \rightarrow 0^+} [\sqrt{2} - \sqrt{x}] = 2 + \sqrt{2} .$$

2. vlivem meze: $\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt \dots$ integrační obor je neomezený.

Konvergencí nevlastního integrálu rozumíme existenci konečné limity uvedené v definici.

Poznámka. Pro každé $x_n \rightarrow b$ ($x_n \rightarrow +\infty$), posloupnost

$$F(x_n) - F(a) = \int_a^{x_n} f(t) dt \text{ konverguje.}$$

Věta 7.10 (kritérium divergence). Nechť $f \in \mathcal{N}(\langle a, x \rangle)$ pro každé $x > a$ a nechť $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \neq 0$. Potom integrál

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ diverguje.}$$

Věta 7.11 (srovnávací kritérium). 1. Nechť b je singulární bod integrálu $\int_a^b f(x) dx$ (tj. f je neomezená v okolí b nebo $b = +\infty$).

2. Nechť $f, g \in \mathcal{N}(\langle a, x \rangle)$ pro libovolné x takové, že $\langle a, x \rangle \subset \langle a, b \rangle$.

3. Platí $0 \leq f(t) \leq g(t)$, $\forall t \in \langle a, x \rangle$.

Fotom:

1. Konverguje-li $\int_a^b g(t)dt$, konverguje také $\int_a^b f(t)dt$.
2. Diverguje-li $\int_a^b f(t)dt$, diverguje také $\int_a^b g(t)dt$.

Důkaz. Z předpokladu 3: $0 \leq \int_a^x f(t)dt \leq \int_a^x g(t)dt \quad \forall x > a$,
tj.

$$0 \leq F(x) \leq G(x).$$

Dále je třeba užít Bolzanovo-Cauchyovo kritérium pro limity funkce.

Příklad.

Rozhodnout o konvergenci integrálu $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$. Protože

$0 \leq \frac{1}{x^2(1+e^x)} \leq \frac{1}{x^2}$ a $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} (=1)$ konverguje, původní integrál konverguje.

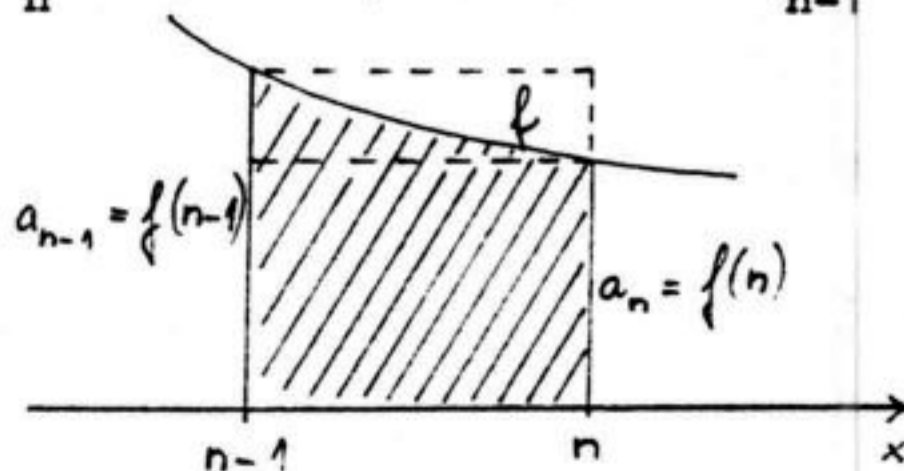
Poznámka. Srovnávací kritérium je také užitečné pro odhad chyby numerického výpočtu.

Věta 7.12 (integrální kritérium absolutní konvergence řady).

Nechť f je nerostoucí kladná funkce definovaná na $\langle 1, +\infty \rangle$ a nechť $f \in \mathcal{M}(\langle 1, x \rangle)$ pro každé $x \in (1, +\infty)$. Nechť dále $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost taková, že $a_n = f(n)$. Potom řada

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a integrál $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ buď současně konvergují nebo současně divergují.

Důkaz. Podle předpokladu je $f(n-1) \geq f(n)$, $n \geq 2$,
 $a_n = f(n) \leq f(x) \leq f(n-1) = a_{n-1}$.



Z obrázku plyne:

$$a_n \leq \int_{n-1}^n f(x) dx \leq a_{n-1} ,$$

$$a_2 \leq \int_1^2 f dx \leq a_1 ,$$

$$a_3 \leq \int_2^3 f dx \leq a_2 , \dots .$$

Po sečtení:

$$\underbrace{a_2 + a_3 + \dots + a_n}_{s_n - a_1} \leq \int_1^n f(x) dx \leq \underbrace{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}}_{s_{n-1}} .$$

Podle srovnávacího kritéria pro řady s nezápornými členy zdůvodníme naše tvrzení.

Příklad.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^{+\infty} = +\infty , \text{ tj. diverguje.}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3n+7} \rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dx}{3x+7} = \frac{1}{3} \ln|3x+7| \Big|_1^{+\infty} = +\infty , \text{ tj. diverguje.}$$

Poznámka. Lehce se odvodí nerovnost $\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \leq \int_n^{+\infty} f(x) dx$,
která se užívá k odhadu chyby přibližného součtu nekonečné řady.

7.3. Integrální součet. Aplikace v geometrii a ve fyzice.

Mějme na intervalu $\langle a, b \rangle$ dānu spojitou funkci f . Zvolme na $\langle a, b \rangle$ body (tzv. dělení D intervalu $\langle a, b \rangle$)

$$(D) : x_0 = a , x_1, x_2, \dots, x_{n-1} , x_n = b .$$

Je-li f spojitā na $\langle a, b \rangle$, potom $f \in \mathcal{N}(\langle a, b \rangle)$ a také $f \in \mathcal{N}(x_k, x_{k+1})$. Potom pro libovolné dělení D platí

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) f(\xi_k) ,$$

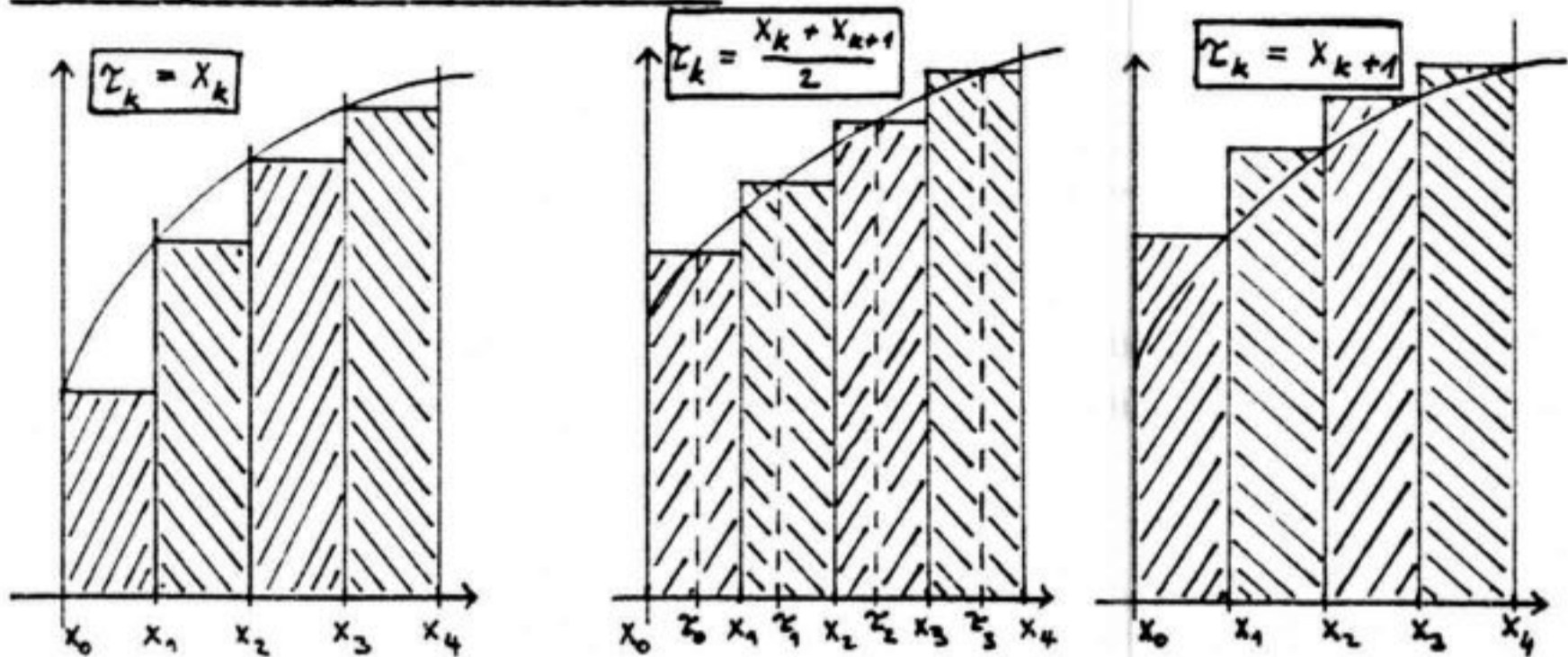
kde ξ_k , $k = 0, 1, \dots, n-1$ jsou body, jejichž existence je zaručena prvním dūsledkem vĕty 7.6.

Definice 7.6. Nechť τ_k je libovolný bod intervalu $\langle x_k, x_{k+1} \rangle$ (např. $\tau_k = x_k$, resp. $\tau_k = x_{k+1}$). Výraz

$$S(D) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\tau_k)(x_{k+1}-x_k)$$

se nazývá integrálním součtem pro funkci f odpovídající danému dělení (D) a vybraným bodům τ_k .

Příklady integrálních součtů:



Věta 7.13. Je-li f spojitá na $\langle a, b \rangle$ (tj. $f \in \mathcal{N}(\langle a, b \rangle)$), potom pro každé $\varepsilon > 0$ existuje takové $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, že nerovnost

$$\left| S(D) - \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon$$

platí pro všechna ta dělení D , pro která je $\max \underbrace{|x_{k+1} - x_k|}_{\Delta x_k} < \delta$.

Jinak řečeno

$$\lim_{\max |\Delta x_k| \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\tau_k)(x_{k+1}-x_k) = \int_a^b f(x) dx .$$

Důkaz (hlavní myšlenka). Jestliže zjemňujeme dělení D tak, aby $\max |\Delta x_k| \rightarrow 0$, budou se součty

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\tau_k)(x_{k+1}-x_k) ; \quad \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1}-x_k) ;$$

(v nichž $\tau_k \in \langle x_k, x_{k+1} \rangle$ je libovolné a $\xi_k \in \langle x_k, x_{k+1} \rangle$ je zaručeno větou o střední hodnotě) od sebe lišit stále méně, neboť výraz

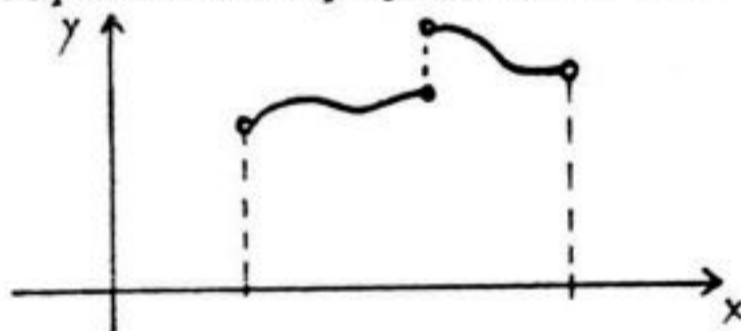
$$\sum_{k=0}^{n-1} [f(\tau_k) - f(\xi_k)](x_{k+1}-x_k)$$

bude v limitě (pro $n \rightarrow +\infty$, $\max |\Delta x_n| \rightarrow 0$) nulový v důsledku spojitosti funkce f .

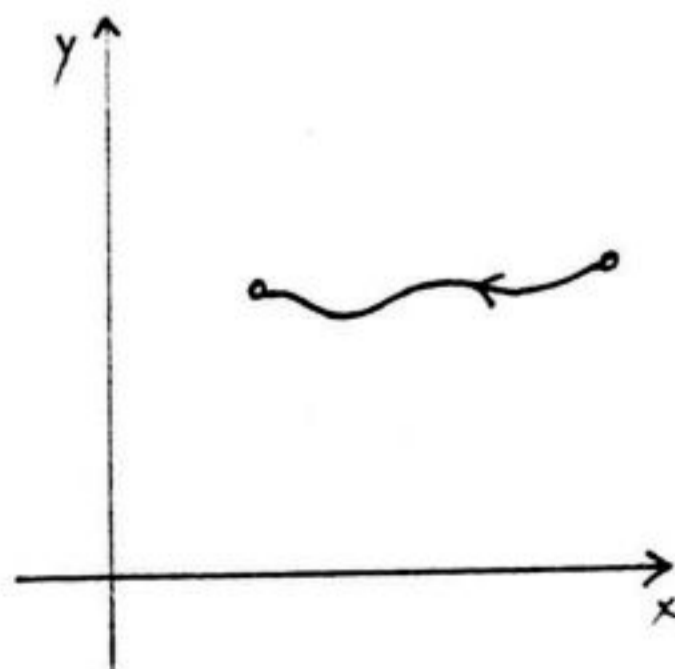
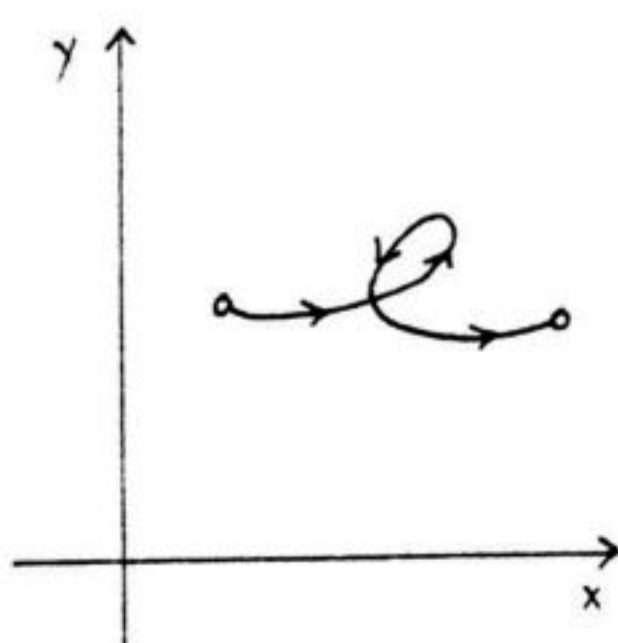
Poznámka. Z předchozích úvah je patrné, jak zobecnit pojem určitého integrálu i na takové funkce f , které nejsou newtonovsky integrovatelné z toho důvodu, že vztah $F'(x) = f(x)$ neplatí v každém bodě $x \in \langle a, b \rangle$.

Definice 7.7. (a) Regulární křivkou danou kartézsky pro $x \in (a, b)$ budeme rozumět graf funkce $y = f(x)$ pro $x \in (a, b)$, kde $f(x) \geq 0$ je spojitá diferencovatelná funkce.
 (b) Regulární křivkou danou parametricky pro $t \in (t_1, t_2)$ budeme rozumět graf funkce $x = x(t)$, $y = y(t)$ pro $t \in (t_1, t_2)$, $y(t) \geq 0$, kde
 (i) $x = x(t)$, $y = y(t)$ jsou spojitě diferencovatelné funkce proměnné $t \in (t_1, t_2)$;
 (ii) $x = x(t)$ je rostoucí funkcí t .

Poznámka. Předpokladem spojitosti chceme vyloučit křivky:

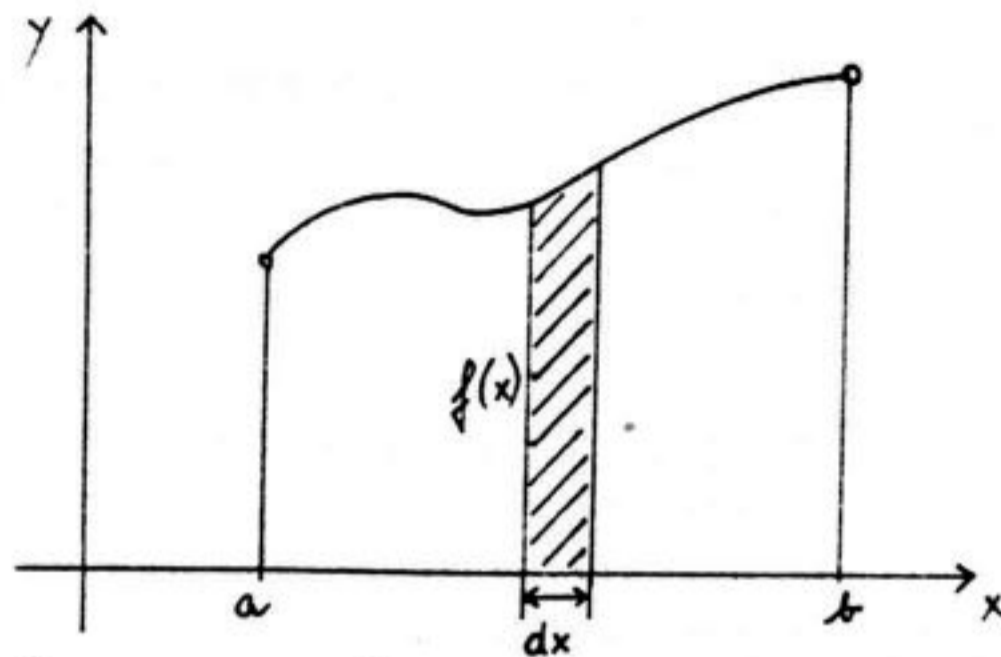


a předpokladem (ii) křivky:



A. Výpočet obsahu plochy.

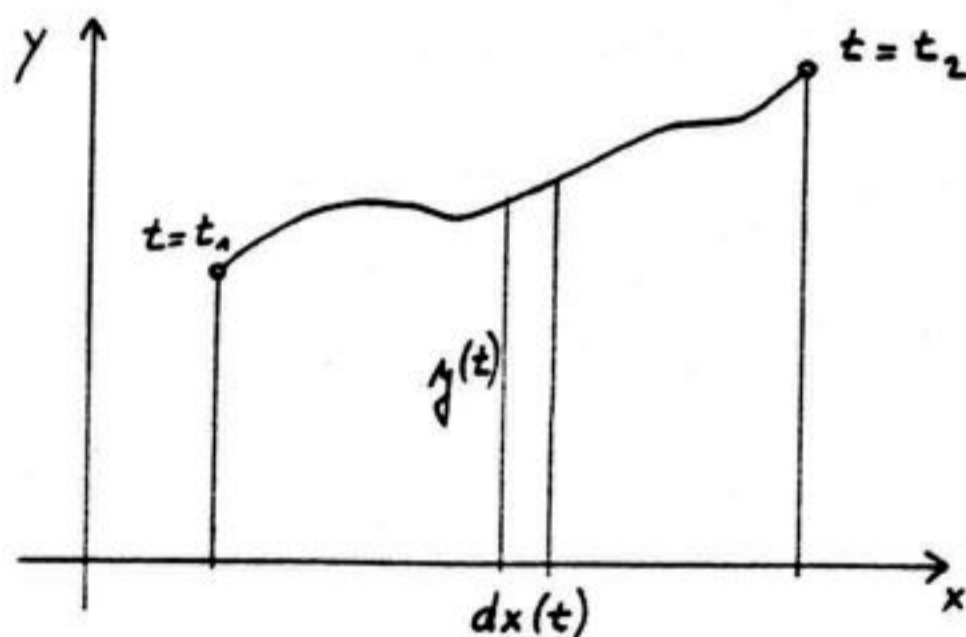
A1. Regulární křivka daná kartézsky:



$dS = f(x) dx$
element obsahu

$$S = \int_a^b f(x) dx .$$

A2. Regulární křivka daná parametricky:

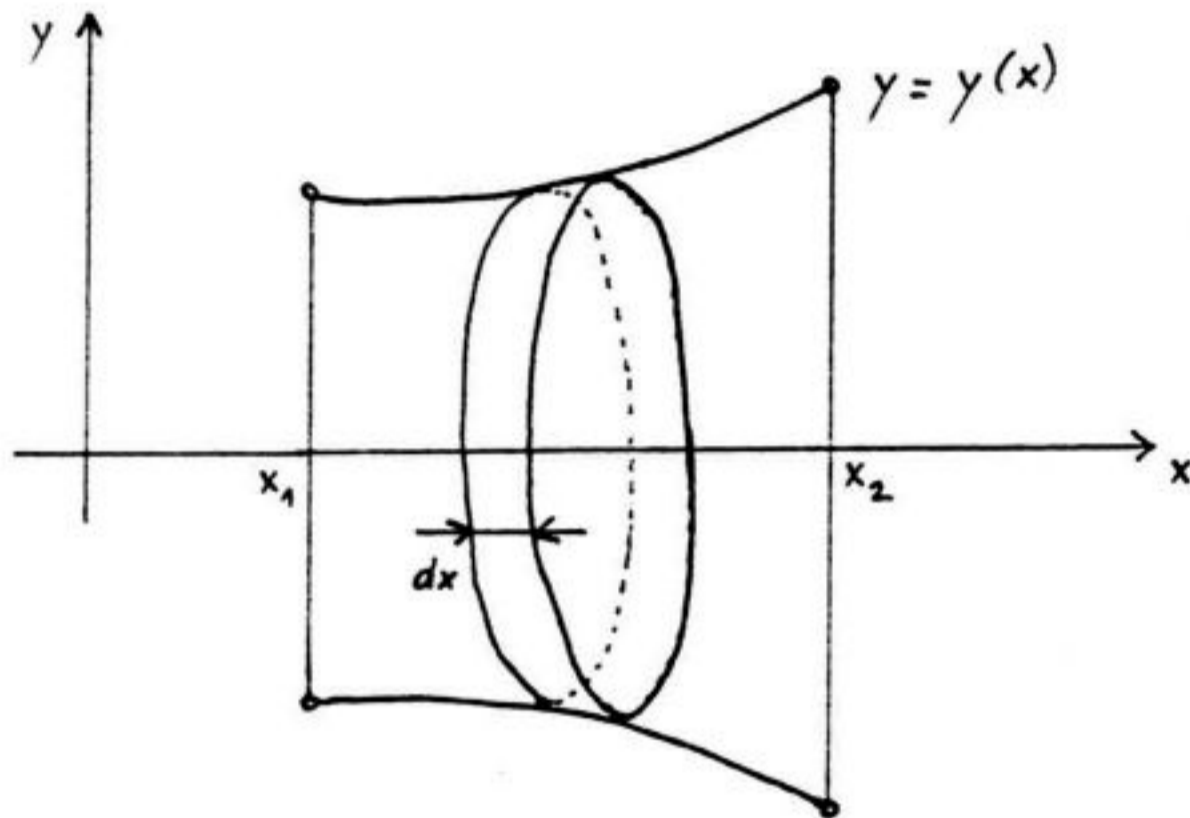


$dx = \frac{dx}{dt} dt$, element obsahu: $dS = y(t)dx = y(t) \frac{dx}{dt} dt$,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \frac{dx(t)}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt .$$

B. Objem tělesa vzniklého rotací křivky.

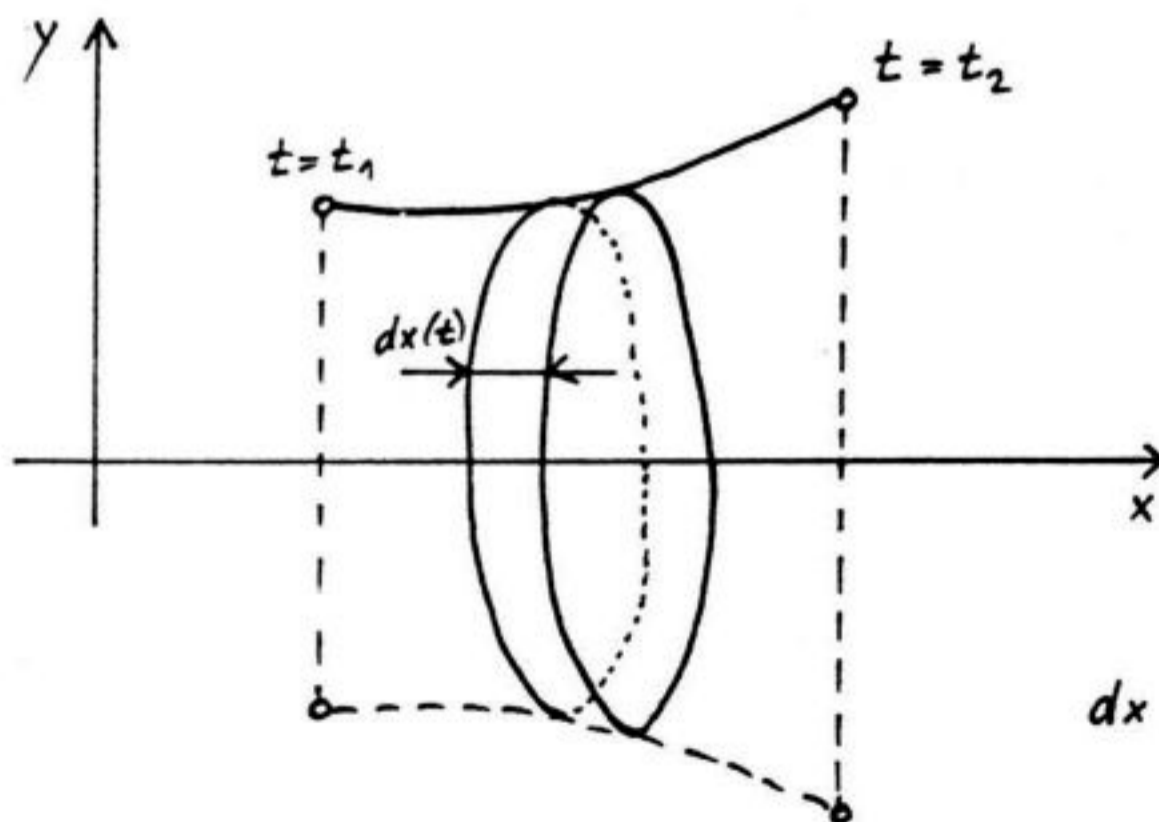
B1. Regulární křivka dané kartézsky.



Element objemu:

$$dV = \pi y^2(x) dx \Rightarrow V = \pi \int_{x_1}^{x_2} y^2(x) dx .$$

B2. Regulární křivka dané parametricky.



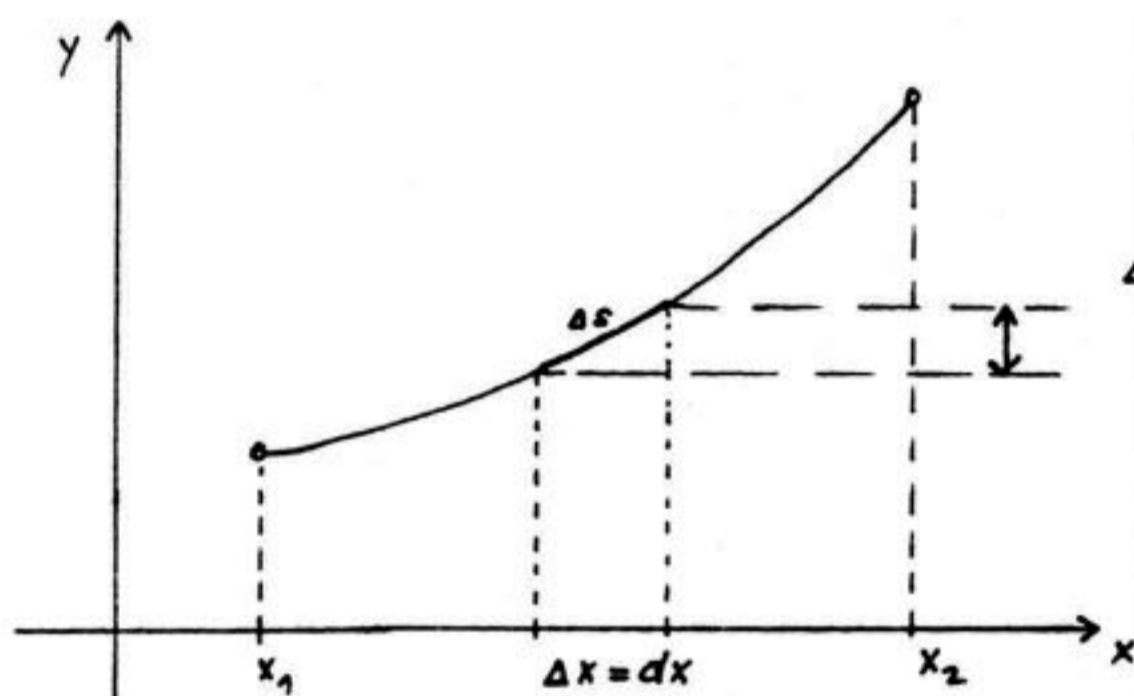
$$dx = \frac{dx}{dt} \cdot dt$$

Element objemu $dV = \pi y^2(t) \frac{dx}{dt} dt,$

$$V = \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2(t) \frac{dx}{dt} dt .$$

C. Délka křivky.

C1. Regulární křivka daná kartézsky.

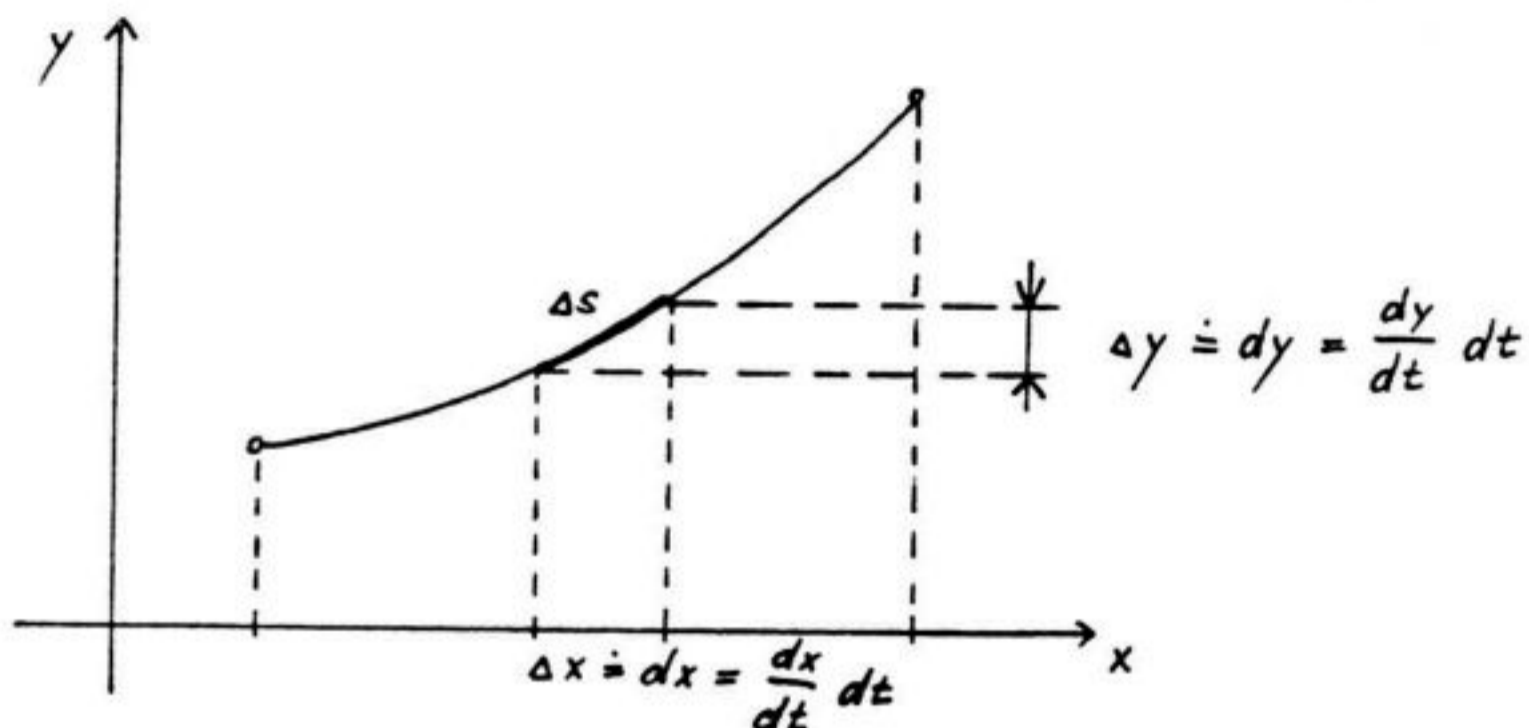


$$\Delta y \doteq dy = y'(x)dx$$

$$\begin{aligned} \Delta s &= \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \doteq \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{(dx)^2 + (y'(x))^2 (dx)^2} = \\ &= \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx . \end{aligned}$$

Zavedeme-li element délky: $ds = \Delta s$, tj. $ds = \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx,$
potom $s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx .$

C2. Regulární křivka daná parametricky.



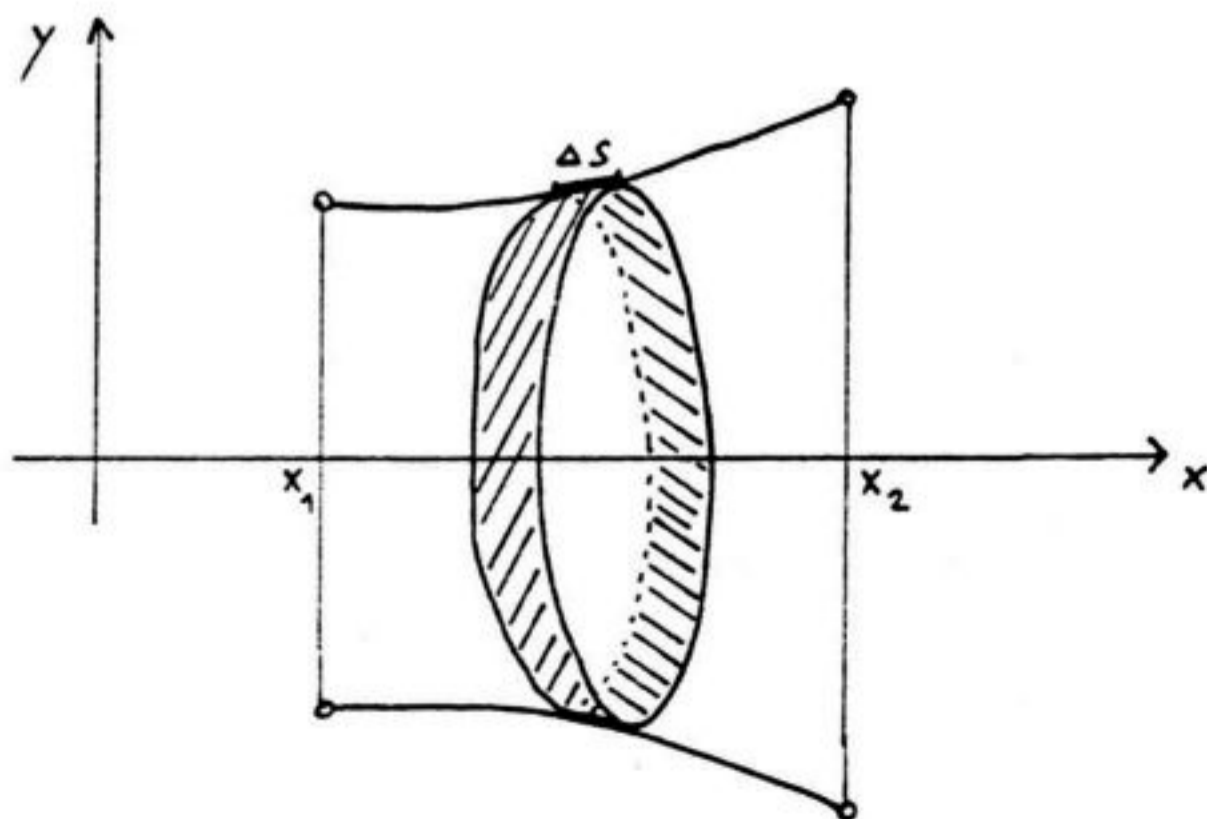
$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 dt^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt, \quad ds = \Delta s, \quad \text{tj.}$$

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt.$$

D. Obsah plochy vzniklé rotací křivky.

D1. Regulární křivka daná kartézsky:



Obsah pláště komolého kužele

$$dS \doteq 2\pi y(x) ds \doteq 2\pi y(x) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx .$$

Tedy položíme

$$S = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y(x) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx .$$

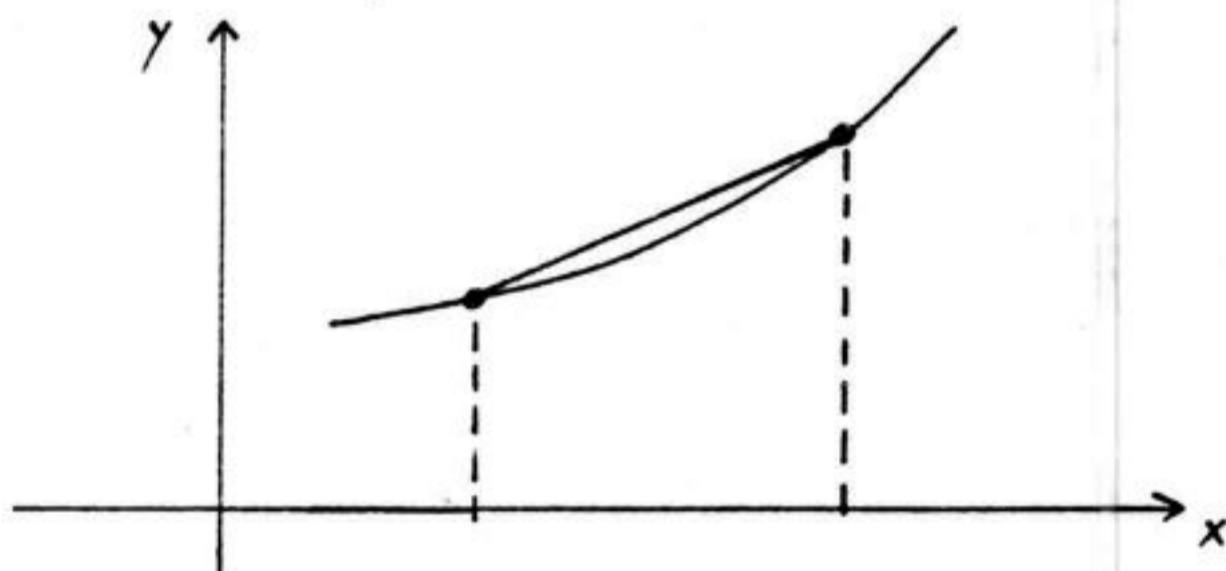
D2. Regulární křivka daná parametricky.

$$V \text{ tomto případě } \Delta S \doteq 2\pi y(t) \Delta s = 2\pi y(t) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt .$$

$$\text{Položíme tedy } S = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt .$$

E. Statický moment křivky.

Statický moment nějakého elementu k ose je součin jeho hmotnosti a vzdálenosti od osy.



Statický moment elementu hladké regulární křivky

1. vzhledem k ose x :

$$dM_x = \begin{cases} y(x) ds , \\ y(t) ds . \end{cases}$$

2. vzhledem k ose y :

$$dM_y = \begin{cases} x ds , \\ x(t) ds . \end{cases}$$

Definice statického momentu homogenní hladké regulární křivky vzhledem k ose x :

$$M_x = \begin{cases} \int_{x_1}^{x_2} y(x) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx , \\ \int_{t_1}^{t_2} y(t) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt ; \end{cases}$$

vzhledem k ose y :

$$M_y = \begin{cases} \int_{x_1}^{x_2} x \cdot \sqrt{1+(y'(x))^2} dx & , \\ \int_{t_1}^{t_2} x(t) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt & ; \end{cases}$$

Souřadnice těžiště hladké regulární křivky (homogenní) délky s :

$$x_T = \frac{M_y}{s} \quad , \quad y_T = \frac{M_x}{s} \quad . \text{ Platí následující tzv. 1. Guldinova věta:}$$

Věta 7.14. Obsah plochy vzniklé rotací hladké regulární křivky je roven součinu délky křivky a dráhy těžiště (kterou opíše při rotaci).

Důkaz. Provedeme pro rotaci kolem osy x :

$$F = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y(x) ds \quad (\text{obsah plochy})$$

$$s \cdot 2\pi x_T = s \cdot 2\pi \cdot \frac{\int_{x_1}^{x_2} y(x) ds}{s} = F .$$

Příklad.

Pomocí Guldinovy věty stanovte souřadnice těžiště cykloidy $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in (0, 2\pi)$.

Ze symetrie: $x_T = \pi a$,

$$y_T = \frac{F}{2\pi s} = \frac{\frac{64}{3}\pi a^2}{2\pi \cdot 8a} = \frac{4}{3} a \quad , \quad T(\pi a, \frac{4}{3} a) .$$

F. Moment setrvačnosti křivky.

Moment setrvačnosti nějakého elementu vzhledem k ose je součin jeho velikosti a druhé mocniny jeho vzdálenosti od osy. Zaveďme moment setrvačnosti hladké regulární křivky vzhledem k ose x :

$$I_x = \begin{cases} \int_{x_1}^{x_2} y^2(x) \sqrt{1+(y'(x))^2} dx & , \\ \int_{t_1}^{t_2} y^2(t) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt & . \end{cases}$$

Vzhledem k ose y :

$$I_y = \begin{cases} \int_{x_1}^{x_2} x^2 \sqrt{1+(y'(x))^2} dx & , \\ \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt & . \end{cases}$$

G. Práce proměnné síly po přímé dráze.

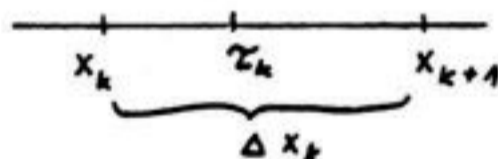
Dráha = úsečka mezi body a, b :



Velikost síly v bodě x je charakterizována hodnotou funkce f v bodě x : $y = f(x)$.

Zvolíme dělení intervalu $\langle a, b \rangle$: $x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n$.

Položíme $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$:



Přibližné vyjádření práce (elementu práce) na úsečce $x_k x_{k+1}$ je dáno vztahem

$$\Delta W = f(\zeta_k) \Delta x_k .$$

Celkovou práci tedy můžeme aproximovat vztahem

$$W \doteq \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k) \Delta x_k .$$

Na prave straně stojí integrální součet. V limitě pro $\max |\Delta x_k| \rightarrow 0$ dostaneme vlevo celkovou práci a vpravo určitý integrál od a do b :

$$W = \int_a^b f(x) dx .$$

Podobně je dán impuls síly $f = f(t)$ v časovém rozmezí od α do β :

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt .$$

8. Taylorova formule. Průběh funkce.

8.1. Derivace a diferenciály vyšších řádů.

Definice 8.1. Nechť funkce f je diferencovatelná v bodě x_0 a jeho okolí. Je-li navíc v bodě x_0 diferencovatelná funkce f' , tj. když existuje limita

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0+h) - f'(x_0)}{h} = f''(x_0) ,$$

pak ji nazýváme druhou derivací funkce f v bodě x_0 a funkce f se pak nazývá dvakrát diferencovatelná v bodě x_0 .

Poznámka. Když existuje $f''(x_0)$, potom

$$f''(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2} .$$

Definice 8.2. Předpokládáme, že na intervalu I má funkce f derivace $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n-1)}(x)$. Existuje-li derivace funkce $f^{(n-1)}(x)$, potom se nazývá derivací n -tého řádu v bodě x , tj. $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$; $f^{(0)}(x) = f(x)$.

Definice 8.3. Pro funkci f a bod x_0 definujeme:

1. $f(x_0+h) - f(x_0) = \Delta f(x_0)$ - první diference v bodě x_0 .

Vlastnost: $\Delta(f+g) = \Delta f + \Delta g$.

$$\begin{aligned} \Delta^2 f(x_0) &= \Delta(\Delta f(x_0)) = \Delta[f(x_0+h) - f(x_0)] = \\ &= [f(x_0+2h) - f(x_0+h)] - [f(x_0+h) - f(x_0)] , \end{aligned}$$

tzv. druhá diference funkce f v bodě x_0 .

Obecně $\Delta^n y = \Delta(\Delta^{n-1} y)$ je tzv. n -tá diference.

$$\begin{aligned} 2. \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0+th_1) - f(x_0)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0+th_1) - f(x_0)}{th_1} h_1 = f'(x_0)h_1 = \\ &= \underline{df(x_0, h_1)} . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^2 f(x_0, h_1, h_2) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{df(x_0+th_2, h_1) - df(x_0, h_1)}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f'(x_0+th_2)h_1 - f'(x_0)h_1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f'(x_0+th_2)h_1 - f'(x_0)h_1}{th_2} h_2 = \\ &= f''(x_0)h_1 h_2 . \end{aligned}$$

Odtud $d^2 f(x_0, h) = f''(x_0)h^2$, zde $h_1 = h_2 = h$.
 Obecně:

$$d^n f(x_0, h) = d(d^{n-1} f(x_0, h)) = f^{(n)}(x_0)h^n .$$

8.2. Taylorova formule.

O funkci f budeme předpokládat, že má v bodě x_0 a jeho okolí $U(x_0)$ derivace až do určitého řádu.

1. Nechť existuje $f'(x)$, $x \in U(x_0)$: potom

$$\int_{x_0}^x f'(t)dt = f(x) - f(x_0) , \text{ neboli } f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t)dt .$$

Podle věty o střední hodnotě: pro každé $x \in U(x_0)$ existuje $\xi \in (x_0, x)$, resp. $\xi \in (x, x_0)$, takové, že platí

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0) .$$

2. Nechť existuje $f''(x)$, $x \in U(x_0)$: potom lze následujícím způsobem užít metodu per-partes:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x f'(t)dt &= \left| \begin{array}{l} t = x-z \\ dt = -dz \\ \langle x_0, x \rangle \rightarrow \langle x-x_0, 0 \rangle \end{array} \right| = \int_0^{x-x_0} f'(x-z)dz = \left| \begin{array}{l} f' = u , u' = f'' \\ 1 = v' , v = z \end{array} \right| = \\ &= [zf'(x-z)]_0^{x-x_0} + \int_0^{x-x_0} zf''(x-z)dz = (x-x_0)f'(x_0) + \int_{x_0}^x (x-t)f''(t)dt , \end{aligned}$$

$$\text{tj. } f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \int_{x_0}^x (x-t)f''(t)dt .$$

Podle zobecněné věty o střední hodnotě: pro každé $x \in U(x_0)$ existuje ξ , takové, že

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(\xi)}{2} (x-x_0)^2 .$$

3. Nechť existuje $f'''(x)$, $x \in U(x_0)$: uvedenou substitucí a následným užitím metody per partes:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x-x_0)^2 + \frac{1}{2!} \int_{x_0}^x (x-t)^2 f'''(t) dt ,$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x-x_0)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!} (x-x_0)^3 .$$

Indukcí zobecníme předchozí výsledky:

Věta 8.1 (Taylorova věta). Nechť funkce f je diferencovatelná až do řádu $n+1$ v bodě x_0 a jeho okolí $U(x_0)$. Potom pro každé $x \in U(x_0)$ platí

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n + \underbrace{\frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt}_{R_{n+1}(x, x_0)}$$

a existuje $\xi = \xi(x)$ ležící mezi x a x_0 , že

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)^{n+1}}_{T_n(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)^{n+1}}_{R_{n+1}(x, x_0)} .$$

Polynom $T_n(x)$ nejvýše n -tého ^{stupně} se nazývá Taylorův polynom funkce f v bodě x_0 .

Rozdíl $f(x) - T_n(x) = R_{n+1}(x_0, x)$ nazýváme chybou Taylorova polynomu.

Vztah $f(x) = T_n(x) + R_{n+1}(x_0, x)$ se nazývá Taylorovým rozvojem nebo Taylorovou formulí (v bodě x_0).

Klademe: $\xi = x_0 + \sqrt[n]{x-x_0}$, $0 < \sqrt[n]{} < 1$.

Důkaz. Tvrzení věty je dokázáno pro $n = 1, 2$. Pro $n = 3$ lze postupovat zcela obdobně.

Taylorovu formuli je zvykem psát také v následujících podobách.

Při označení $x - x_0 = h$:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!} h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} h^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} h^{n+1}$$

nebo

$$\Delta f(x_0, h) = df(x_0, h) + \frac{1}{2!} d^2 f(x_0, h) + \dots + \frac{1}{n!} d^n f(x_0, h) + R_{n+1}.$$

Věta 8.2. Nechť funkce f má v bodě x_0 a jeho okolí $U(x_0)$ derivace všech řádů a existuje číslo $M > 0$ takové, že

$$|f^{(n)}(x)| \leq M$$

pro všechna $n \geq 0$ a pro libovolné $x \in U(x_0)$. Potom

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_{n+1}(x_0, x) = 0.$$

Důkaz. Podle předpokladu je $|R_{n+1}(x_0, x)| \leq \frac{M|x-x_0|^n}{(n+1)!}$ a je

známo, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

Poznámka. Věta 8.2 nám umožňuje chápat $T_n(x)$ jako n -tý částečný součet jisté řady, které se říká Taylorova řada.

Aplikace Taylorovy formule.

1. Aproximace dané diferencovatelné funkce v okolí daného bodu.
Užití k řešení nelineárních rovnic, odhady chyb.
2. Metoda výpočtu limity funkce.
3. Nástroj k určování průběhu funkce.

Pro výpočet limit užíváme Taylorovu formuli ve tvaru:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n + o((x-x_0)^n).$$

(Symbol $o(h^n)$ je definován podmínkou $\frac{o(h^n)}{h^n} \rightarrow 0, h \rightarrow 0$.)

Příklad.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x} - x) \stackrel{x=\frac{1}{t}}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{t} (\sqrt{1+t} - 1) \right), \quad |t| < 1;$$

$$\sqrt{1+t} = (1+t)^{\frac{1}{2}} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)t + \left(\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2}\right)t^2 + o(t^2) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{t} (\sqrt{1+t} - 1) = \frac{1}{t} \left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + o(t^2) \right] \longrightarrow \frac{1}{2}.$$

8.3. Základy optimalizace. Průběh funkce.

Definice 8.4. Funkce $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ostře roste (klesá) v bodě $x_0 \in I$, když existuje okolí $U_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ bodu x_0 takové, že

$$\begin{array}{lll} f(x) < f(x_0) & (f(x) > f(x_0)) & \forall x \in (x_0 - \delta, x_0), \\ f(x_0) < f(x) & (f(x_0) > f(x)) & \forall x \in (x_0, x_0 + \delta). \end{array}$$

Když místo znaku $<$ máme \leq , řekneme, že f roste (neostře), resp. neklesá.

Poznámka. Lze dokázat následující tvrzení (pokuste se o to!)
Je-li funkce ostře rostoucí v každém bodě intervalu I , potom je ostře rostoucí na I . Připomeňme, že ostrý růst funkce f na I znamená, že funkce f má tuto vlastnost:

$$\forall x_1, x_2 \in I: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Bod, v němž funkce f roste (klesá) se nazývá bodem růstu (poklesu) funkce.

Věta 8.3. Když funkce $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ má derivaci v bodě $x_0 \in I$ a je $f'(x_0) > 0$ ($f'(x_0) < 0$), potom funkce f v bodě x_0 ostře roste (klesá).

Důkaz. Když $f'(x_0) > 0$, pak $\exists \delta > 0$, takové, že

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta).$$

Odtud plynou vlastnosti uvedené v definici 8.4.

Poznámka. Věta 8.3 udává postačující podmínky monotonie funkce f v bodě. Obrácená věta ("Když f ostře roste v x_0 , pak $f'(x_0) > 0$ ") neplatí: $f(x) = x^3$ ostře roste v bodě $x_0 = 0$, ačkoliv $f'(0) = 0$.

Kromě toho je třeba upozornit na to, že růst (pokles) funkce v bodě je lokální vlastnost. Z toho, že funkce f je rostoucí (klesající) v bodě ještě nevyplývá, že f roste (klesá) v nějakém dostatečně malém okolí tohoto bodu.

Například funkce

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

má v bodě $x = 0$ derivaci $f'(0) = \frac{1}{2} > 0$, a tedy roste v tomto bodě podle věty 8.3. Derivace $f'(x) = \frac{1}{2} + 2 \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ dané funkce pro $x \neq 0$ nabývá v libovolném okolí bodu $x = 0$ jak kladné tak záporné hodnoty:

$$\forall \delta > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N}: \forall k > k_0 \quad x_k \in (-\delta, \delta), \quad x_k = \frac{1}{2k\pi}, \\ \bar{x}_k \in (-\delta, \delta), \quad \bar{x}_k = \frac{1}{x + 2k\pi} : f'(x_k) = -\frac{1}{2}, \quad f'(\bar{x}_k) = \frac{3}{2}.$$

Definice 8.5. Bod \hat{x} se nazývá stacionární bod funkce f , když f je diferencovatelná v tomto bodě a $f'(\hat{x}) = 0$.

Definice 8.6. Mějme reálnou funkci $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ($I \subset \mathbb{R}$ interval). Číslo $f(\hat{x})$ je lokálním minimem (maximem) funkce f v bodě \hat{x} , existuje-li $\delta > 0$ takové, že platí

$$f(\hat{x}) \leq f(x) \quad (f(\hat{x}) \geq f(x)) \quad \forall x \in U_\delta(\hat{x}) \cap I.$$

Pokud platí ostré nerovnosti pro $x \neq \hat{x}$, $x \in U_\delta(\hat{x}) \cap I$, hovoříme o ostrém lokálním minimu (maximu). Bod \hat{x} nazýváme bodem (ostrého) lokálního minima (maxima).

$$\text{Píšeme: } f(\hat{x}) = \min_{x \in U_\delta(\hat{x}) \cap I} f(x), \quad \text{resp. } f(\hat{x}) = \max_{x \in U_\delta(\hat{x}) \cap I} f(x)$$

Termínem extrém (resp. optimum) označujeme buď minimum nebo maximum [extremum = krajní, optimus = nejlepší].

Věta 8.4 (nutná podmínka existence lokálního extrému). Je-li $\hat{x} \in I$ bodem lokálního extrému funkce f , potom buď $f'(\hat{x}) = 0$ nebo $f'(\hat{x})$ neexistuje.

Důkaz. Neexistuje-li derivace, není co dokazovat; existuje-li derivace, je tvrzení důsledkem Fermatovy věty.

Věta 8.5 (postačující podmínka existence lokálního extrému - bez derivace). Nechť funkce f je spojitá v bodě \hat{x} a jeho okolí $U(\hat{x}) = (\hat{x} - \delta, \hat{x} + \delta)$.

- a) Je-li f ostře rostoucí v intervalu $(\hat{x} - \delta, \hat{x})$ a ostře klesající v intervalu $(\hat{x}, \hat{x} + \delta)$, potom $f(\hat{x})$ je ostré lokální maximum funkce f .
- b) Je-li f ostře klesající v intervalu $(\hat{x} - \delta, \hat{x})$ a ostře rostoucí v intervalu $(\hat{x}, \hat{x} + \delta)$, potom $f(\hat{x})$ je ostré lokální minimum funkce f .

Důkaz vyplývá z definic 8.4 a 8.6.

Věta 8.6 (postačující podmínka existence lokálního extrému - s derivací). Nechť funkce f je spojitá v bodě \hat{x} a jeho okolí $U(\hat{x}) = (\hat{x} - \delta, \hat{x} + \delta)$ a je diferencovatelná (alespoň) pro $x \in U(\hat{x})$.

- a) Když $f'(\hat{x}) = 0$ a $f'(x) > 0$ pro $x \in (\hat{x} - \delta, \hat{x})$,
 $f'(x) < 0$ pro $x \in (\hat{x}, \hat{x} + \delta)$,
potom $f(\hat{x})$ je ostré lokální maximum funkce f .
- b) Když $f'(\hat{x}) = 0$ a $f'(x) < 0$ pro $x \in (\hat{x} - \delta, \hat{x})$,
 $f'(x) > 0$ pro $x \in (\hat{x}, \hat{x} + \delta)$,
potom $f(\hat{x})$ je ostré lokální minimum funkce f .

Důkaz. Na intervalu $\langle x, \hat{x} \rangle$, resp. $\langle \hat{x}, x \rangle$ se užije věta o střední hodnotě: $f(x) - f(\hat{x}) = f'(\xi)(x - \hat{x})$.

Poznámka. Jsou tři možnosti v hodnotě derivace: $f'(\hat{x}) < 0$, $f'(\hat{x}) = 0$, $f'(\hat{x}) > 0$. Neznamená to však, že bod \hat{x} má také jen tři možnosti být: bodem růstu, poklesu, extrému. Např.

u funkce $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$, je $f'(0) = 0$ avšak bod $\hat{x} = 0$ není ani bodem růstu, ani bodem poklesu, ani bodem extrému.

Věta 8.7 (postačující podmínka existence lokálního extrému - s vyšší derivací). Necht funkce f je spojitě diferencovatelná v bodě \hat{x} a jeho okolí až do řádu n a platí

$$f'(\hat{x}) = f''(\hat{x}) = \dots = f^{(n-1)}(\hat{x}) = 0, \quad f^{(n)}(\hat{x}) \neq 0.$$

- a) Když n je sudé a $f^{(n)}(\hat{x}) < 0$, potom $f(\hat{x})$ je ostré lokální maximum f .
- b) Když n je sudé a $f^{(n)}(\hat{x}) > 0$, potom $f(\hat{x})$ je ostré lokální minimum f .
- c) Když n je liché a $f^{(n)}(\hat{x}) < 0$, potom \hat{x} je bodem poklesu.
- d) Když n je liché a $f^{(n)}(\hat{x}) > 0$, potom \hat{x} je bodem růstu.

Důkaz. Z Taylorova vzorce a z předpokladů dostaneme

$$f(\hat{x}+h) - f(\hat{x}) = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(\hat{x} + \nu h), \quad 0 < \nu < 1, \quad h = x - \hat{x}.$$

- a) Z podmínky $f^{(n)}(\hat{x}) < 0$ a ze spojitosti $f^{(n)}(x)$ plyne, že existuje okolí \hat{x} , v němž $f^{(n)}(\hat{x} + \nu h) < 0$. V tomto okolí pak je $f(\hat{x}+h) < f(\hat{x})$, neboť $h^n > 0$ pro n sudé.
- b) Dokazuje se analogicky jako a).
- c) Pro n liché je $\text{sgn } h = \text{sgn } h^n$ a ze spojitosti $f^{(n)}$ plyne, že $\text{sgn } f^{(n)}(\hat{x}) = \text{sgn } f^{(n)}(\hat{x} + \nu h)$ v nějakém okolí \hat{x} . Když tedy $h < 0$, $f^{(n)}(\hat{x}) < 0$, pak $f(\hat{x}+h) > f(\hat{x})$;
 $h > 0$, $f^{(n)}(\hat{x}) < 0$, pak $f(\hat{x}+h) < f(\hat{x})$,
a tedy \hat{x} je bodem poklesu.
- d) Dokazuje se analogicky jako c).

Příklad.

Pro funkci $f(x) = x^2 - x^3$ jsou $\hat{x}_1 = 0$, $\hat{x}_2 = \frac{2}{3}$ stacionární body. Protože $f'(\hat{x}_1) = 0$, $f''(\hat{x}_1) = 2 > 0$, je \hat{x}_1 bod ostrého lokálního minima. Protože $f'(\hat{x}_2) = 0$, $f''(\hat{x}_2) = -2 < 0$, je \hat{x}_2 bod ostrého lokálního maxima; $f(0) = 0$; $f(\frac{2}{3}) = \frac{28}{27}$ jsou hledané extrémy.

Příklad.

Pro funkci $f(x) = x^3 + x^4$ v bodě $\hat{x} = 0$ platí: $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = 6 (\neq 0)$. První nenulová derivace ve stacionárním bodě je lichá a její hodnota je číslo kladné. Proto $\hat{x} = 0$ není bodem extrému, ale bodem růstu.

Poznámka. Z definice extrému a z věty 8.5 bychom mohli usoudit, že když např. funkce f má v bodě x_0 maximum, pak existuje takové okolí bodu x_0 , že pro $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ funkce f roste a pro $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ funkce f klesá. Dá se ukázat, že takový úsudek je nesprávný. Uvažujme funkci

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2(2 + \sin \frac{1}{x}) & , x \neq 0 \\ 2 & , x = 0 \end{cases} .$$

Protože $f(x) - f(0) = -x^2(2 + \sin \frac{1}{x}) < 0$, $x \neq 0$, existuje $\max f(x) = f(0) = 2$. Avšak pro body $x_k = \frac{1}{\pi + 2k\pi}$,

$x_k \rightarrow 0$, je $f'(x_k) < 0$, a tedy funkce f nemůže růst v žádném levostranném okolí bodu $x = 0$. Tedy výrok typu: "V levostranném okolí bodu maxima funkce roste a v pravostranném okolí bodu maxima funkce klesá" je nepravdivý.

Poznámka. Existují funkce, které mají v bodě extrému všechny derivace nulové. Příkladem je funkce $f(x) = \exp(-\frac{1}{x^2})$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Protože $f(x) - f(0) > 0$, pak $f(0) = \min f(x)$. Lze ukázat, že $f^{(n)}(0) = 0$, $n \in \mathbb{N}$ (ověřte).

Definice 8.7. Mějme *reálnou* funkci $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Číslo $f(\hat{x})$ nazveme globálním minimem (globálním maximem) funkce f na I ,

platí-li

$$f(\hat{x}) \leq f(x) \quad (f(\hat{x}) \geq f(x)) \quad \forall x \in I.$$

Pokud platí ostré nerovnosti pro $x \neq \hat{x}$, hovoříme o ostrém globálním minimu (maximu).

Píšeme: $f(\hat{x}) = \min_{x \in I} f(x)$, resp. $f(\hat{x}) = \max_{x \in I} f(x)$.

Definice 8.8. Úlohu najít lokální, resp. globální extrém $f(\hat{x})$ dané (spojité) funkce f a příslušný bod extrému \hat{x} nazýváme optimalizační úloha nebo úloha na extrém.

Definice 8.9. Diferencovatelná funkce f je konvexní (ostře konvexní) v bodě \hat{x} , existuje-li okolí $U(\hat{x})$ bodu \hat{x} takové, že pro všechna $x \in U(\hat{x})$ platí

$$\left. \begin{aligned} f(x) &\geq f(\hat{x}) + f'(\hat{x})(x-\hat{x}) \\ (f(x) &> f(\hat{x}) + f'(\hat{x})(x-\hat{x})) \end{aligned} \right\} \text{tj. graf } f \text{ leží "nad tečnou" v } \hat{x}.$$

Obrácené nerovnosti definují funkci konkávni v bodě \hat{x} .

Poznámka. Připomeňme, že spojitá funkce je konvexní na intervalu I , platí-li nerovnost

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in I \quad \forall t \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Diferencovatelná funkce je konvexní na intervalu I , je-li konvexní v každém jeho bodě. Pro nediferencovatelné funkce nelze pojem konvexnosti v bodě definovat.

Věta 8.8 (nutná a postačující podmínka konvexity, resp. konkavity). Nechť funkce $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ je dvakrát diferencovatelná na I . Funkce f je konvexní (konkávni) na I právě tehdy, když $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) $\forall x \in I$. Ostrá nerovnost implikuje ostrou konvexitu (konkavitu).

Důkaz plyne z Taylorova vzorce v libovolném bodě $\hat{x} \in I$ a z definice 8.9:

$$f(x) - f(\hat{x}) - f'(\hat{x})(x-\hat{x}) = \frac{1}{2!} f''(\xi)(x-\hat{x})^2.$$

Definice 8.10. Nechť funkce f má spojitou derivaci v bodě \bar{x} a jeho okolí. Existuje-li $\delta > 0$ takové, že pro $x \in (\bar{x} - \delta, \bar{x})$ platí

$$f(x) < f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) \quad (f(x) > f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}))$$

a pro $x \in (\bar{x}, \bar{x} + \delta)$ platí

$$f(x) > f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) \quad (f(x) < f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x})) ,$$

pak řekneme, že funkce f má v bodě \bar{x} inflexi, resp. že \bar{x} je inflexním bodem funkce f nebo že $(\bar{x}, f(\bar{x}))$ je inflexním bodem grafu funkce f .

Věta 8.9.

1. Nutná podmínka inflexe. Nechť funkce f je spojitě diferencovatelná na I a existuje $f''(x)$, $x \in I$. Je-li $\bar{x} \in I$ inflexní bod, potom $f''(\bar{x}) = 0$.
2. Postačující podmínka inflexe. Nechť funkce f má druhou derivaci f'' v nějakém okolí bodu \bar{x} a graf funkce f má v bodě $[\bar{x}, f(\bar{x})]$ tečnu. Mění-li f'' znaménko při přechodu přes bod \bar{x} , potom \bar{x} je inflexní bod.

Důkaz plyne z Taylorova vzorce.

Úlohou na průběh funkce rozumíme následující sérii úloh:

1. Stanovit $D(f)$ a určit hromadné body $D(f)$, v nichž funkce f není definována a určit nulové body funkce.
2. Vyšetřit body (intervaly) spojitosti a body nespojitosti.
3. Stanovit případné speciální vlastnosti: sudost, lichost, periodičnost.
4. Stanovit limity ve význačných bodech (krajní body definičního oboru, body nespojitosti, body v nichž neexistuje derivace).
5. Určit intervaly monotonie (růst, pokles).
6. Určit lokální, příp. globální extrémy funkce.
7. Určit intervaly konvexnosti a konkávnosti funkce.
8. Určit inflexní body a určit inflexní tečny.
9. Určit asymptoty grafu funkce.

Poznámka. Určete asymptoty grafu funkce $y = f(x)$, $x \in I$.

- a) "Svislá asymptota" existuje, existuje-li v některém bodě x_0 nevlastní limita

$$\lim_{x \rightarrow x_0 \pm} f(x) .$$

- b) "Vodorovná asymptota" existuje, když existuje

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} f(x) .$$

- c) "Šikmá asymptota" existuje (je to přímka $y = kx + q$)
když existují

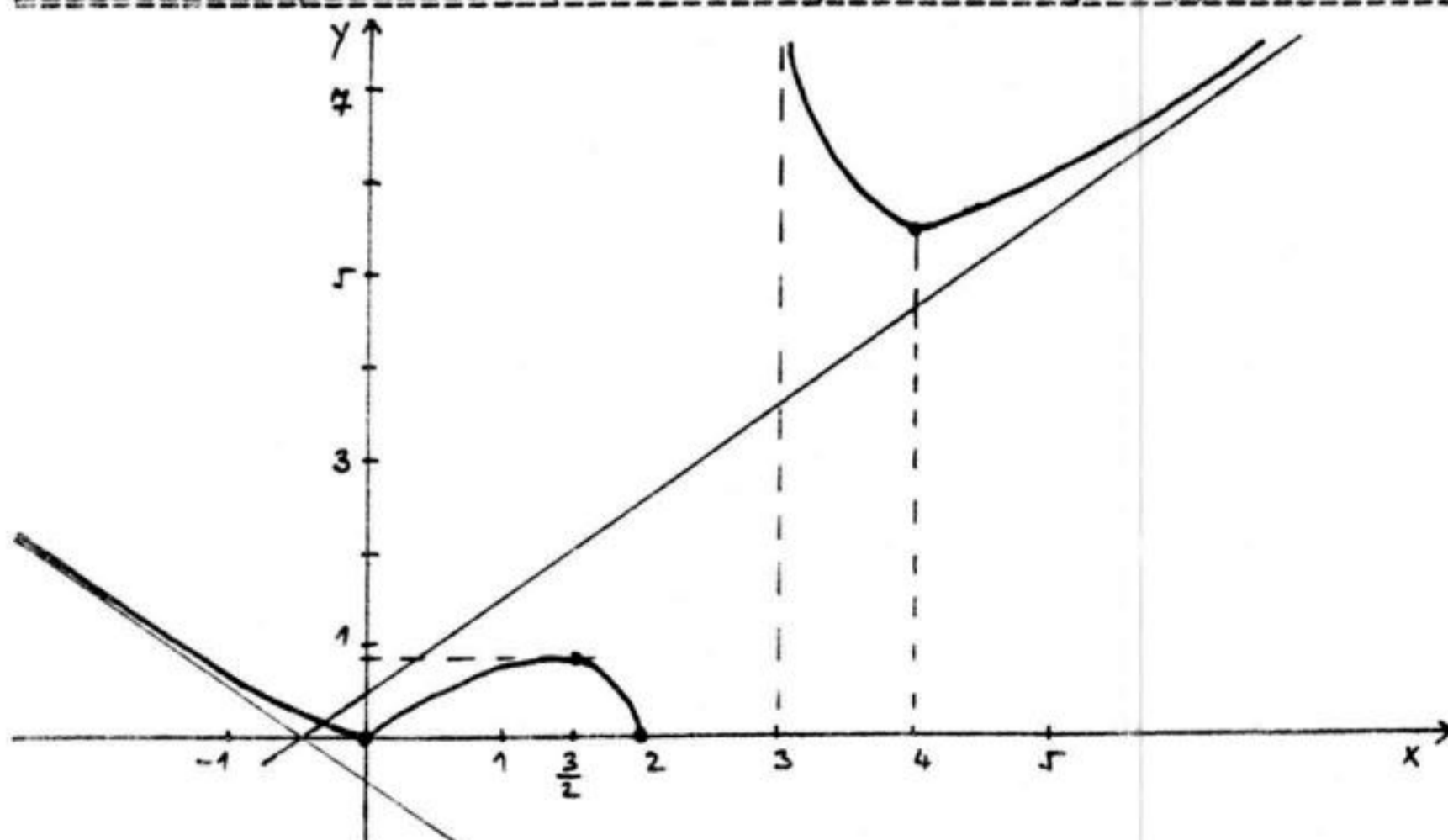
$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \frac{f(x)}{x} = k \quad ; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} (f(x) - kx) = q ,$$

kde k a q jsou reálná čísla.

Příklad. Průběh funkce $f(x) = |x| \sqrt{\frac{x-2}{x-3}}$.

x	$-\infty$	$(-\infty, 0)$	0 nul. bod	$(0, \frac{3}{2})$	$\frac{3}{2}$	$(\frac{3}{2}, 2)$	$(2, 3)$
f(x)	$+\infty$	+ klesá	0	+ roste	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	+ klesá	2 nul.bod není def.
f'(x)	/	< 0	neex.	> 0	= 0	< 0	/
f''(x)	/	> 0 konvex.	neex.	< 0 konkáv.	< 0	< 0 konkáv.	/

3+	$(3, 4)$	4	$(4, +\infty)$	$+\infty$	asymtoty
$+\infty$	> 0 klesá	$4\sqrt{2}$	roste		$y = -x - \frac{1}{2}$ $x \rightarrow -\infty$
vert.	< 0	= 0	> 0		$y = x + \frac{1}{2}$ $x \rightarrow +\infty$
asymtota	> 0 konvex.	> 0 konvex.	> 0 konvex.		



Příklad.

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$.

Postup:

1. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$,

nulové body: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

2. f je spojitá ve všech bodech $x \neq -2$.

3. Ani sudá, ani lichá, ani periodická.

4. Limity ve význačných bodech:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2)^{\frac{1}{x}}}{(x+2)^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1 + \frac{2}{x}} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^2)^{\frac{1}{x}}}{(x+2)^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{1 + \frac{2}{x}} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2}{x+2} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2}{x+2} = -\infty,$$

$$f'(x) = \left(\frac{x^2}{x+2}\right)' = \frac{2x(x+2) - x^2}{(x+2)^2} = \frac{x^2 + 4x}{(x+2)^2}$$

5. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x = 0$, $x_1 = 0$
 $x_2 = -4$

$x \in (-\infty, -4) = f'(x) > 0$ roste

$x \in (-4, 0) = f'(x) < 0$ klesá

$x \in (0, +\infty) = f'(x) > 0$ roste

6. $f(0) = 0$ lokální minimum

$f(-4) = -8$ lokální maximum

$$7. f''(x) = \frac{(2x+4)(x+2)^2 - (x^2+4x)2(x+2)}{(x+2)^4} = \frac{2x^2+8x+8-2x^2-8x}{(x+2)^3}$$

$$= \frac{8}{(x+2)^3}$$

$f''(x) < 0$ pro $x \in (-\infty, -2)$ konkávní
 $f''(x) > 0$ pro $x \in (-2, +\infty)$ konvexní

8. Nemá inflexní body, neboť v bodě -2 není f definována

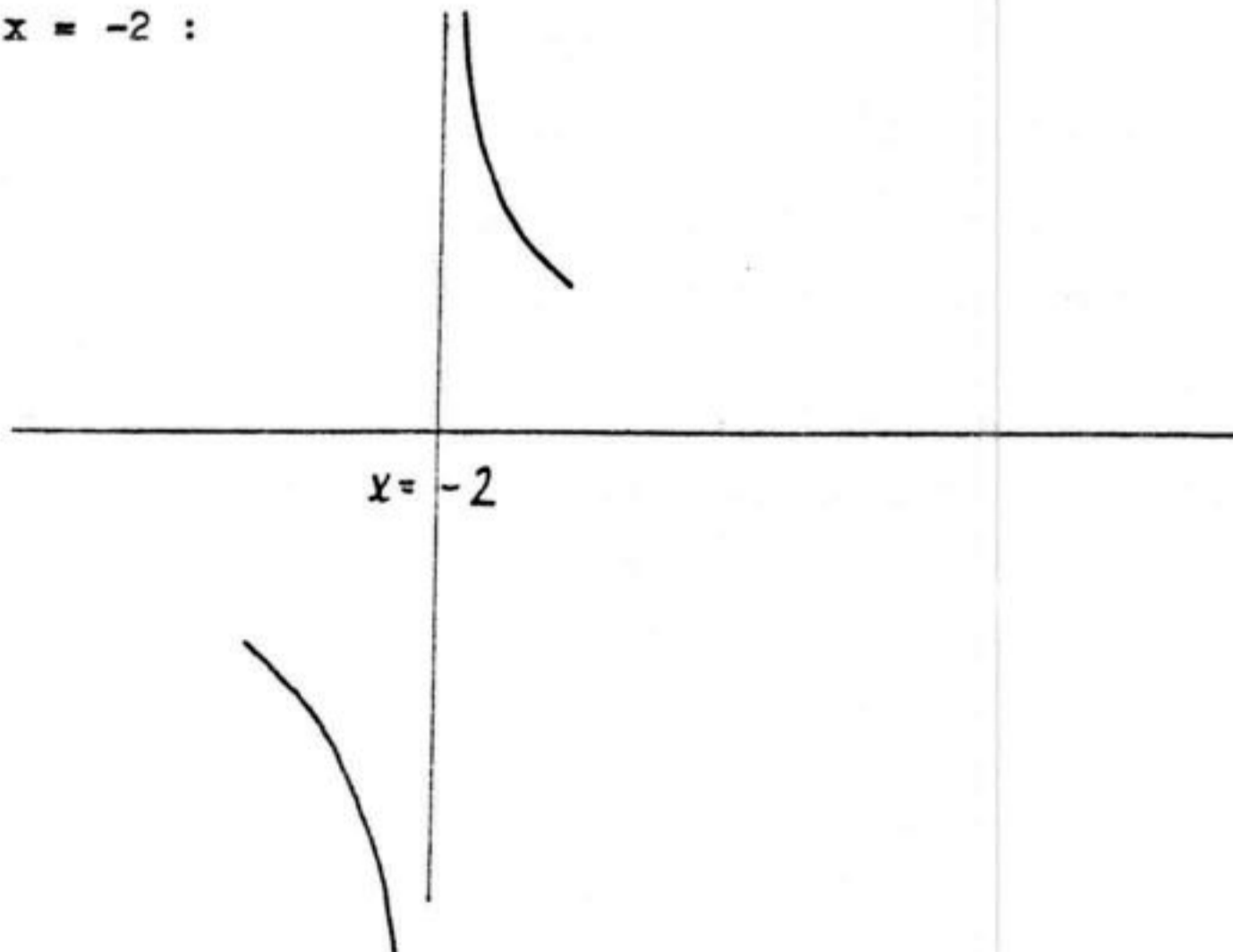
x	$(-\infty, -4)$	-4	$(-4, -2)$	-2	$(-2, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f(x)$	roste, konk.	0	klesá konk.	není def.	klesá konvex.	$= 0$	roste konvex.
$f'(x)$	> 0	$= 0$	< 0	"-	< 0	$= 0$	> 0
$f''(x)$	< 0	< 0	< 0	"-	> 0	> 0	> 0

9. Určení asymptot:

Asymptota grafu funkce f je přímka, ke které se blíží graf dané funkce f .

a) Asymptota ve vlastním bodě

$x = -2 :$



b) Asymptota v $\pm \infty$: $y = kx + q$

- v případě, že funkce f má "lineární růst"

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2}{x+2} - (kx+q) \right] = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \left[\frac{x^2}{x+2} - kx - q \right] = 0,$$

$$0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x}{x+2} - k \right] \Rightarrow k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+2} = 1,$$

$$q = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2}{x+2} - kx \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x^2 - 2x}{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{x+2} = -2$$

$y = x - 2$ je asymptota v $+\infty$.

Podobně v $-\infty$:

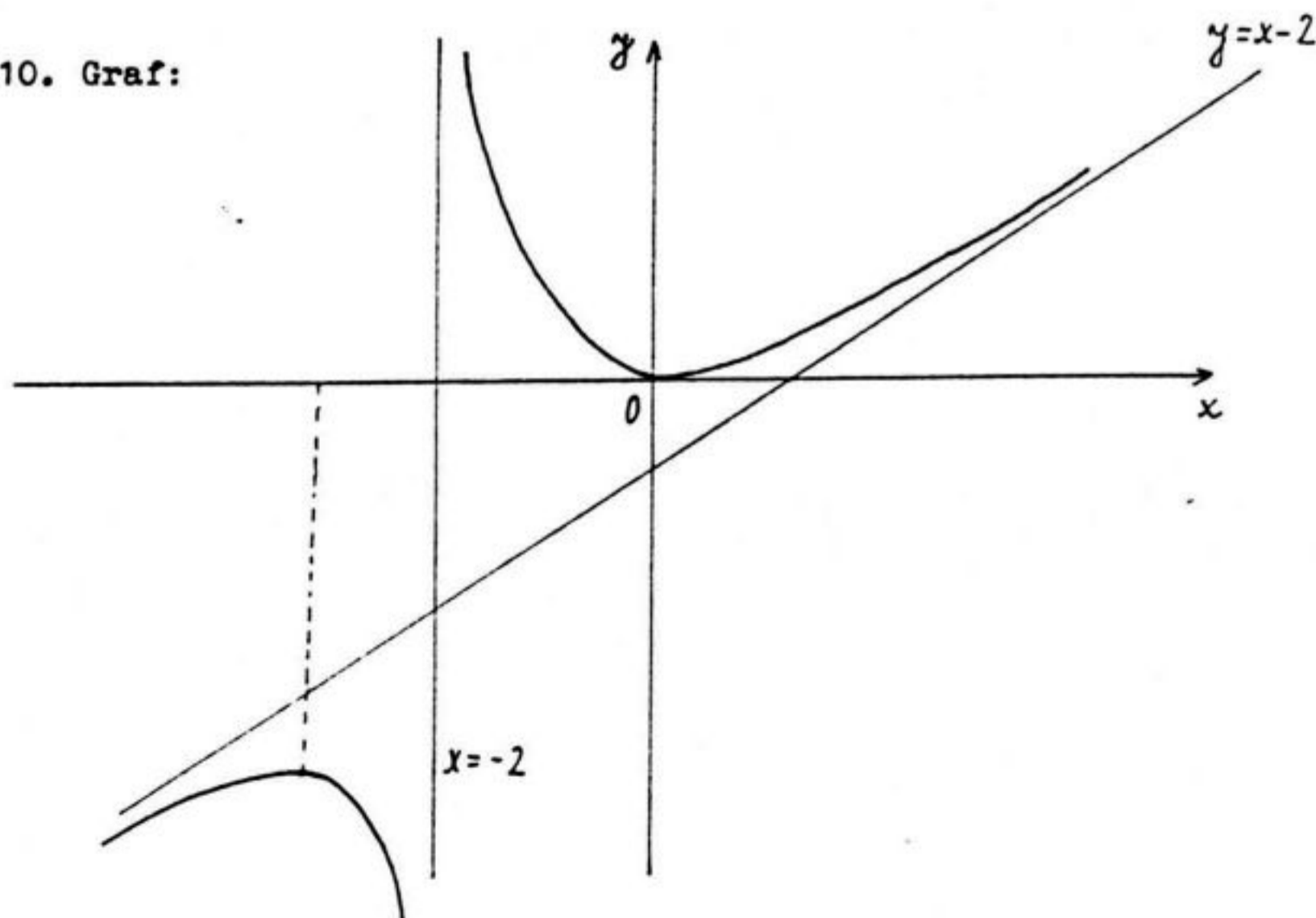
$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x+2} = 1$$

$$q = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x^2 - 2x}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{x+2} = -2,$$

$y = x - 2$ je také asymptotou v $-\infty$.

Poznámka. Obecně může být asymptota v $-\infty$ jiná přímka než je asymptota v $+\infty$!

10. Graf:



**Podrobný
syllabus přednášky
Matematická analýza II**

Doporučená literatura:

1. Drábek, Mika: Matematická analýza I, ZČU Plzeň, 1992.
2. Brabec, Martan, Rozenský: Matematická analýza I, SNTL Praha, 1986.
3. Kluvánek, Mišík, Švec: Matematika I, II, Alfa, Bratislava 1970.
4. Eliáš, Horvát, Kajan: Zbierka úloh z vyššej matematiky, část 2, 3, Alfa, Bratislava 1972,73.
5. Jirásek, Kriegelstein, Tichý: Sbíрка řešených příkladů z matematiky, SNTL, Praha 1979 (Alfa, Bratislava 1981).
6. Berman: Sborník zadač po kurzu matematičeskovo analíza, Gitl Moskva.
7. Polák: Matematická analýza I, cvičení 1, VŠSE Plzeň, 1983.
8. Dėmidovič: Sborník zadač i upražněnij po matematičeskomu analízu, Nauka, Moskva 1969.

1 Základní matematické pojmy

1.1 Množiny a operace s nimi

Definice množiny, podmnožina, prázdná množina, rovnost množin, číselné množiny. Operace s množinami: sjednocení, průnik, rozdíl; doplněk množiny, nekonečné sjednocení, nekonečný průnik. Kartézský součin množin.

1.2 Logické symboly, výroky a výrokové formy.

Výrok, negace výroku, konjunkce, disjunkce, implikace, ekvivalence výroků. Kvantifikované výroky (pro každý prvek, existuje prvek, existuje právě jeden prvek), složené kvantifikované výroky.

1.3 Zobrazení množin.

Zobrazení, definiční obor hodnot zobrazení, transformace množiny. Surjektivní zobrazení (zobrazení na), injektivní zobrazení (zobrazení prosté), bijektivní zobrazení, inverzní zobrazení. Věta 1.1 o inverzním zobrazení.

1.4 Spočetné a nespočetné množiny.

Ekvivalence množin, mohutnost množin, konečná množina, spočetná množina, nespočetná množina. Posloupnost prvků, rekurentně definovaná posloupnost, n -tý člen posloupnosti. Věta 1.2 o spočetnosti nekonečné podmnožiny spočetné množiny. Věta 1.3 o spočetnosti sjednocení spočetných množin. Spočetnost kartézského součinu spočetných množin, spočetnost množiny racionálních čísel. Nekonečný desetinný zlomek (rozvoj), konečný desetinný zlomek (rozvoj). Věta 1.4 o nespočetnosti množiny všech konečných desetinných zlomků (rozvoje).

1.5 Reálná čísla.

Definice reálného čísla, dolní a horní n -místná aproximace reálného čísla, uspořádání reálných čísel (trichotomie, tranzitivita). Věta 1.5 o nespočetnosti množiny reálných čísel. Věta 1.6 o reálné ose. Souvislost množiny reálných čísel, algebraická struktura na množině reálných čísel, operace s reálnými

čísly a jejich vlastnosti (asociativita, komutativita, existence nulového a jednotkového prvku, opačný prvek).

1.6 Omezené podmnožiny \mathbb{R} .

Množina shora omezená, zdola omezená, omezená, neomezená, intervaly v \mathbb{R} , minimum množiny, maximum množiny, absolutní hodnota reálného čísla a její vlastnosti.

1.7 Supremum a infimum číselné množiny.

Definice suprema a infima. Věta 1.7 o vzájemném vztahu maxima a suprema, minima a infima. Věta 1.8 o základních vlastnostech suprema a infima. Věta 1.9 – princip vložených intervalů. Věta 1.10 o existenci suprema a infima.

1.8 Topologie číselné osy.

Kruhové okolí bodu, pravostranné (pravé) a levostranné (levé) okolí bodu, prstencové okolí bodu, vnitřní bod množiny, vnitřek množiny, hraniční bod množiny, hranice množiny, uzávěr množiny, otevřená množina, uzavřená množina, hromadný bod množiny, izolovaný bod množiny, diskrétní množina.

2 Posloupnosti reálných čísel.

2.1 Posloupnosti a operace s nimi.

Definice reálné posloupnosti, operace s posloupnostmi (sčítání, odčítání, násobení, dělení, číselný násobek, nulová posloupnost).

2.2 Omezené a monotónní posloupnosti.

Posloupnost omezená, shora omezená, zdola omezená, posloupnost monotónní (rostoucí, klesající), ostře (ryze) monotónní (ostře rostoucí, ostře klesající), geometrické znázornění posloupností, posloupnost vybraná. Supremum a infimum posloupnosti. Věta 2.1 o výběru monotónní posloupnosti.

2.3 Konvergentní posloupnosti.

Definice konvergence, pojem limity posloupnosti, některé příklady konvergentních posloupností.

2.4 Vlastnosti konvergentních posloupností.

Věta 2.2 o jednoznačnosti limity. Věta 2.3 o vzájemném vztahu konvergence a omezenosti. Věta 2.4 o nerovnosti limit. Věta 2.5 o sevření. Věta 2.6 o algebře limit. Věta 2.7 o nerovnosti členů posloupnosti. Pojem cauchyovské (fundamentální) posloupnosti. Věta 2.8 o omezenosti fundamentální posloupnosti.

2.5 Kritéria konvergence.

Věta 2.9 nutná a postačující podmínka konvergence (Bolzanovo-Cauchyovo kritérium). Věta 2.10 o konvergenci omezené a monotónní posloupnosti. Dolní limita (\liminf), horní limita (\limsup). Věta 2.11 o konvergenci omezené posloupnosti. Pojem částečné limity.

2.6 Divergentní posloupnosti.

Divergence k plus a minus nekonečnu. Věta 2.12 o vztahu konvergence a divergence. Věta 2.13 – algebra divergentních posloupností. Věta 2.14 – vztahy divergentní a omezené posloupnosti.

3 Číselné řady.

3.1 Konvergentní řady.

Nekonečná řada, členy řady, posloupnost částečných součtů, konvergentní a divergentní řady, součet řady, oscilující řady. Věta 3.1 o lineární kombinaci konvergentních řad.

3.2 Kritéria konvergence.

Věta 3.2 – Bolzanovo-Cauchyovo kritérium. Zbytek řady, nutná podmínka konvergence, harmonická řada.

3.3 Kritéria konvergence pro řady s nezápornými členy.

Věta 3.3 o konvergenci řady se shora omezenou posloupností částečných součtů. Věta 3.4 – Srovnávací kritérium. Majoranta a minoranta řady. Věta 3.5 – d'Alambertovo (podílové) kritérium. Limitní d'Alambertovo kritérium. Věta 3.6 – Cauchyovo (odmocninové) kritérium. Limitní Cauchyovo kritérium.

3.4 Alternující řady. Absolutně konvergentní řady.

Odhad součtu alternující řady, absolutně konvergentní řada. Věta 3.7 – Leibnizovo kritérium. Věta 3.8 – Absolutní konvergence. Jiné vyjádření čísla e .

4 Reálná funkce jedné reálné proměnné.

4.1 Základní pojmy.

Pojem reálné funkce jedné reálné proměnné, vzory, argumenty, obrazy, funkční hodnoty, definiční obor funkce, obor hodnot funkce, graf funkce. Způsoby zadání funkce: analyticky, graficky, tabulkou, explicitní a implicitní zadání funkce. Restrikce (zúžení) funkce, příklady funkcí (mocninná funkce, znaménková funkce, funkce jednotkového skoku, funkce intervalového impulsu, funkce bodového impulsu, Diracova distribuce, Dirichletova funkce). Rovnost funkcí, rostoucí, klesající, nerostoucí, neklesající funkce, monotónní, ostře monotónní funkce, konvexní funkce, ostře konvexní funkce, konkávní funkce, ostře konkávní funkce, sudá a lichá funkce, periodická funkce, základní perioda, omezená funkce, shora a zdola omezená funkce, prostá funkce (injektivní). Věta 4.1 – ostře monotónní funkce je prostá. Rovnice o jedné neznámé, pojem řešení rovnice (kořen rovnice). Věta 4.2 o řešitelnosti rovnic. Pojem inverzní funkce. Věta 4.3 o existenci inverzní funkce. Superpozice funkcí, složená funkce, identická funkce, algebraické operace s funkcemi (součet, rozdíl, součin, podíl, násobek číslem).

4.2 Některé elementární funkce.

Algebraické funkce (racionální celistvá, racionální lomená, iracionální), transcendentní funkce (goniometrické, cyklometrické, exponenciální, logaritmické).

ké, hyperbolické, hyperbolometrické).

4.3 Limita funkce.

Limita funkce v bodě, limita funkce v plus a v minus nekonečnu, Heineova definice limity, Cauchyova definice limity. Věta 4.4 o jednoznačnosti limity. Věta 4.5 – algebra limit (o limitě součtu, rozdílu, součinu, podílu). Věta 4.6 – srovnávací. Věta 4.7 o vztahu limity a omezenosti funkce na okolí. Jednostranné limity (limita zprava, limita zleva). Věta 4.8 – kritérium existence limity. Věta 4.9 o limitě složené funkce.

4.4 Některá další fakta.

Asymptotické srovnání funkcí, metoda asymptotických rozvojų, částečná limita funkce, dolní limita (\liminf) a horní limita (\limsup) funkce.

5 Spojitost funkcí.

5.1 Spojitost v bodě, body nespojitosti.

Pojem spojitosti v bodě, jednostranná spojitost. Věta 5.1 – kritéria spojitosti (Cauchyovo, Heineovo, topologické, pomocí jednostranných limit). Body nespojitosti: odstranitelná nespojitost, nespojitost prvního druhu (skok funkce), nespojitost druhého druhu. Věta 5.2 – algebra spojitých funkcí (o spojitosti součtu, rozdílu, součinu, podílu, absolutní hodnotě a násobku spojitých funkcí). Věta 5.3 o spojitosti složené funkce. Věta 5.4 o lokální omezenosti spojitě funkce. Věta 5.5 o zachování znaménka. Funkce po částech spojitá.

5.2 Spojitost v uzavřeném intervalu.

Pojem spojitosti funkce v uzavřeném intervalu. Věta 5.6 o nulové hodnotě funkce (Bolzanova). Věta 5.7 o nabývání maxima a minima (Weierstrassova). Věta 5.8 – postačující podmínka spojitosti, o souvislosti oboru hodnot spojitě funkce na intervalu, o spojitosti inverzní funkce, o bodech nespojitosti monotónní funkce.

5.3 Stejnoměrná spojitost.

Pojem spojitosti funkce na množině, stejnoměrná spojitost na množině. Věta 5.9 o stejnoměrné spojitosti funkce na uzavřeném intervalu (Cantorova).

6 Základní pojmy diferenciálního a integrálního počtu.

6.1 Diference, derivace, diferenciál.

Diference argumentu v bodě x_0 , poměrná diference, derivace funkce v bodě, diferenciál funkce v bodě, jednostranná derivace. Věta 6.1 – derivovatelnost a diferencovatelnost. Věta 6.2 o vztahu diferencovatelnosti a spojitosti. Věta 6.3 – pravidla derivování a diferencování. Věta 6.4 – derivace a diferenciál složené funkce. Věta 6.5 – derivace inverzní funkce.

6.2 Derivace a diferenciály elementárních funkcí.

Přehled základních vzorců.

6.3 Fyzikální a geometrický význam derivace a diferenciálu.

Vyjádření některých fyzikálních zákonů (rozpad radioaktivní látky, zákon hybnosti). Geometrický význam derivace (rovnice tečny a normály grafu funkce).

6.4 Základní věty diferenciálního počtu.

Pojem (ostrého) lokálního maxima a minima. Věta 6.6 – nutná podmínka existence extrému (Fermat). Věta 6.7 o střední hodnotě (Rolleova). Věta 6.8 o střední hodnotě (Lograngeova). Věta 6.9 – zobecněná věta o střední hodnotě (Cauchyova). l'Hospitalovo pravidlo.

6.5 Množiny spojitých a diferencovatelných funkcí.

Prostory spojitých funkcí, prostory spojitě diferencovatelných funkcí a jejich vlastnosti.

6.6 Primitivní funkce.

Pojem primitivní funkce k dané funkci na množině v \mathbb{R} . Věta 6.10 – základní vlastnosti primitivní funkce. Neurčitý integrál a jeho základní vlastnosti.

6.7 Metody určování primitivní funkce (technika integrování).

Základní úlohy, tabulka základních vzorců. Věta 6.11 - integrování per partes (po částech). Užití věty 6.11, odvození rekurentních formulí. Věta 6.12 – integrace substitucí. Užití věty 6.12, odvození důležitých vztahů. Integrály typu $\int R(x)dx$, integrály typu $\int R(\sin x, \cos x)dx$, integrály typu $\int R(\sqrt{1-x^2})dx$, $\int R(\sqrt{1+x^2})dx$, $\int R(\sqrt{x^2-1})dx$.

7 Newtonův integrál.

7.1 Základní vlastnosti.

Pojem Newtonova určitého integrálu. Věta 7.1 o vztahu Newtonova integrálu a primitivní funkce. Věta 7.2 – základní vlastnosti Newtonova integrálu. Věta 7.3 – linearita Newtonova integrálu. Věta 7.4 – metoda per partes v Newtonově integrálu. Věta 7.5 – věta o substituci v Newtonově integrálu. Pojem integrálu s proměnnou horní mezí, nevlastní integrál vlivem meze, konvergence a divergence integrálu, nevlastní integrál vlivem funkce.

7.2 Základní věty integrálního počtu.

Věta 7.6 – integrální věta o střední hodnotě. Důsledky integrální věty o střední hodnotě. Věta 7.7 – integrál z nezáporné funkce. Věta 7.8 – obecná věta o střední hodnotě. Věta 7.9 – o vztahu spojitých a integrovatelných funkcí (fundamentální věta matematické analýzy). Pojem zobecněné primitivní funkce, zobecněný Newtonův integrál, konvergence nevlastního integrálu. Věta 7.10 –

kritérium divergence. Věta 7.11 – srovnávací kritérium. Věta 7.12 – integrální kritérium absolutní konvergence řady.

7.3 Integrální součet. Aplikace v geometrii a ve fyzice.

Dělení intervalu, integrální součet a jeho vztah k určitému integrálu. Věta 7.13 – o existenci integrálu. Obsahy rovinných obrazců, délka křivky, objem rotačního tělesa, povrch rotačního tělesa, práce proměnné síly po přímé dráze, impuls síly v časovém rozmezí.

8 Taylorova formule, průběh funkce.

8.1 Derivace a diferenciály vyšších řádů.

Pojem druhé derivace a dvakrát diferencovatelné funkce, derivace n -tého řádu, n -krát diferencovatelná funkce, n -tá diference.

8.2 Taylorova formule.

Věta 8.1 – Taylorova věta. Taylorův polynom n -tého stupně, Taylorův rozvoj, Taylorova formule. Věta 8.2 – podmínka konvergence Taylorovy řady. Aplikace Taylorovy formule (aproximace funkce, metoda výpočtu limity funkce, nástroj k určování průběhu funkce).

8.3 Základy optimalizace. Průběh funkce.

Úloha na lokální extrém, úloha na globální extrém. Věta 8.3 – postačující podmínka monotónnosti v bodě. Věta 8.4 – nutná podmínka existence lokálního extrému. Věta 8.5 – postačující podmínka existence lokálního extrému – bez derivace. Věta 8.6 – postačující podmínka existence lokálního extrému (s derivací). Věta 8.7 – postačující podmínka existence lokálního extrému – s vyšší derivací. Pojem funkce konvexní v bodě a konkávní v bodě, inflexní bod funkce. Věta 8.8 – nutná a postačující podmínka konvexnosti a konkávnosti funkce na intervalu. Věta 8.9 – nutná podmínka inflexe, postačující podmínka inflexe. Úlohy na průběh funkce.

Požadavky pro získání zápočtu.

Doporučené termíny kontrolních písemných prací:

- | | |
|----------|------------------------------|
| 1. práce | v době od 15. 10. do 26. 10. |
| 2. práce | v době od 19. 11. do 30. 11. |
| 3. práce | v době od 17. 12. do 21. 12. |

Posluchač může za každou písemnou práci obdržet maximálně 15 bodů. Za aktivní práci na cvičení může vyučující přidělit za semestr také maximálně 15 bodů.

Dosáhne-li posluchač alespoň 50% z celkového počtu dosažitelných bodů, bude mu cvičení započteno. Posluchač, který nedosáhne uvedené hranice, bude mít možnost na začátku zkuškového období (dle pokynů vyučujícího) napsat opravnou (souhrnnou) písemnou práci, opět s dotací 15 bodů. Posluchač, který ani po této písemné práci nedosáhne celkově alespoň 30 bodů, zápočet neobdrží.

Požadavky ke zkoušce.

Nutnou podmínkou připuštění studenta ke zkoušce je získání zápočtu. Zkouška má písemnou a ústní část. Písemná část zkoušky trvá cca 90 minut a prověřují se v ní nezbytné praktické dovednosti jako např.:

Výpočet limit (vlastních i nevlastních) posloupností a funkcí:

- metoda ekvivalentních úprav,
- l'Hospitalovo pravidlo,
- metoda Taylorova rozvoje.

Určování konvergence posloupností a řad:

- z definice,
- pomocí konvergenčních kritérií (pro posloupnosti i pro řady).

Elementární funkce a jejich restrikce. Konstrukce inverzních funkcí. Grafy.

Technika derivování a diferencování funkcí. Výpočet tečny a normály grafu. Výpočet tečného a normálního vektoru křivky. Výpočet vyšších derivací.

Určování primitivní funkce. Technika integrování (per partes, substituce), integrování racionálních funkcí.

Jednoduché aplikace integrálu. Výpočet obsahů, objemů a povrchů.

Výpočet délky oblouku jednoduché křivky. Odvození příslušných vzorců pomocí integrálních součtů.

Určování průběhu funkce.

Konstrukce Taylorova rozvoje dané funkce. Určování zbytku Taylorova rozvoje a jeho odhad.

Ústní zkouška následuje po písemné části a vyžaduje se látka odpřednášená v zimním semestru v rozsahu, který je dán výše uvedeným přehledem.